Université Paris VII - Denis Diderot

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Sary Drappeau

Répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques, et applications

dirigée par Régis de la Bretèche

soutenue le 19 novembre 2013 devant le jury composé de

M. Régis de la Bretèche	Université Paris Diderot,	directeur
M. Sinnou David	Université Pierre et Marie Curie,	examinateur
M. Étienne Fouvry	Université Paris-Sud,	rapporteur
M. Emmanuel Kowalski	ETH Zürich,	examinateur
M. Joël Rivat	Université d'Aix–Marseille,	examinateur
M. Gérald Tenenbaum	Université de Lorraine,	examinateur

au vu des rapports de

M. Étienne Fouvry,	Université de Paris-Sud
M. Andrew Granville,	Université de Montréal

Institut de Mathématiques de Jussieu–
Paris Rive Gauche
UP7D – Campus des Grands Moulins,
Bâtiment Sophie Germain
75 205 Paris Cedex 13

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre, Case 7012
UP7D – Campus des Grands Moulins,
Bâtiment Sophie Germain
75 205 Paris cedex 13

Résumé

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à certaines propriétés additives des entiers n'ayant pas de grand facteurs premiers. Un entier est dit y-friable si tous ses facteurs premiers sont inférieurs à y. Leur étude est de plus en plus délicate à mesure que y est petit par rapport à la taille des entiers impliqués. On s'intéresse tout d'abord au comptage des solutions à l'équation $a + b = c$ en entiers y-friables a, b et c. On étudie ensuite la valeur moyenne de certaines fonctions arithmétiques sur les entiers friables translatés, de la forme $n - 1$ où n est y-friable.

La méthode du cercle permet de ramener la première question à l'étude de sommes de caractères de Dirichlet tordus par une exponentielle sur les entiers friables, qui sont ensuite évaluées en utilisant des outils classiques d'analyse harmonique, et en faisant intervenir la méthode du col. Les premier et deuxième chapitres étudient la situation respectivement avec et sans l'hypothèse de Riemann généralisée.

Les troisième et quatrième chapitres sont consacrés à la seconde question, qui se ramène à l'étude de la répartition des entiers friables en moyenne dans les progressions arithmétiques. Cela met en jeu des sommes de caractères de Dirichlet sur les entiers friables, ainsi que le grand crible. Dans le dernier chapitre, la méthode de dispersion est employée pour étudier le cas particulier du nombre moyen de diviseurs des entiers friables translatés.

Mots-clefs

Entier sans grand facteur premier, méthode du cercle, méthode du col, sommes d'exponentielles, sommes de caractères, équirépartition dans les progressions arithmétiques, grand crible, méthode de dispersion, sommes de Kloosterman.

Table des matières

Introduction **11**

Notations **21**

I Sommes friables d'entiers friables **23**

1 Sur les solutions friables de l'équation $a + b = c$ **25**
- 1.1 Introduction . . . 25
- 1.2 Rappel de quelques résultats sur les entiers friables . . . 28
- 1.3 Solutions générales pondérées . . . 30
- 1.4 Solutions primitives pondérées et solutions non pondérées . . . 43

2 Sommes friables d'exponentielles et applications **49**
- 2.1 Introduction . . . 49
- 2.2 Estimation de $E(x, y; \vartheta)$ . . . 54
- 2.3 En norme L^2 . . . 76
- 2.4 Application à un théorème de Daboussi . . . 78
- 2.5 Application aux sommes friables d'entiers friables . . . 79

II Entiers friables translatés **85**

3 Propriétés multiplicatives des entiers friables translatés **87**
- 3.1 Introduction . . . 87
- 3.2 Bombieri-Vinogradov pour les entiers friables . . . 89
- 3.3 Valeur moyenne de certaines fonctions arithmétiques . . . 92
- 3.4 Théorème d'Erdös-Kác sur les friables translatés . . . 93

4 Théorèmes type Fouvry–Iwaniec pour les entiers friables **99**
- 4.1 Introduction . . . 99
- 4.2 Lemmes . . . 102
- 4.3 Démonstration du Théorème 4.1 . . . 105
- 4.4 Applications au problème des diviseurs de Titchmarsh des entiers friables . 126

Bibliographie **131**

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de certaines propriétés de type additif des entiers n'ayant pas de grand facteur premier. Ces entiers sont définis par une condition multiplicative : l'étude de leur interaction sous l'addition est une source de problèmes intéressants et délicats. Les entiers friables interviennent en cryptographie, par exemple dans l'algorithme de factorisation $p-1$ de Pollard, ou dans le problème du logarithme discret. Ils sont également utiles dans d'autres situations en théorie analytique des nombres, comme le suggère le résultat récent de Zhang concernant les écarts bornés entre nombres premiers. On présente dans cette introduction les aspects qualitatifs des résultats obtenus.

Étant donnés $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $2 \leq x \leq y$, on note $S(x,y)$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à y, et $\Psi(x,y)$ le nombre de ces entiers. Ainsi $\Psi(x,x) = \lfloor x \rfloor$, tandis que $\lfloor x \rfloor - \Psi(x, x/2)$ est égal au nombre de nombres premiers entre $x/2$ et x. L'étude asymptotique de la quantité $\Psi(x,y)$ en fonction de x et y soulève des questions intéressantes et fait l'objet d'une littérature abondante. Le comportement de $\Psi(x,y)$ et les méthodes appropriés pour l'étudier varient selon la taille de y par rapport à x. On rappelle les principaux résultats connus actuellement.

Lorsque y est proche de x, on peut utiliser le fait que la quantité $\Psi(x/p, p)$ compte le nombre d'entiers dont le plus grand facteur premier est égal à p. On obtient ainsi l'*équation de Buchstab* : lorsque $y < z$,

$$\Psi(x,y) = \Psi(x,z) - \sum_{y<p\leq z} \Psi(x/p, p).$$

Dickman [Dic30] obtient que pour tout $u \geq 1$ fixé, $\Psi(x, x^{1/u}) \sim x\rho(u)$ pour un certain $\rho(u) \in]0,1]$ qui définit une fonction de u, appelée fonction de Dickman, déterminée par les conditions

$$\rho(u) = 1, \text{ si } u \in [0,1],$$
$$u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0 \text{ si } u > 1.$$

En gardant la notation $u = (\log x)/\log y$, le meilleur résultat obtenu par des techniques analogues est du à Hildebrand : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\Psi(x,y) = x\rho(u)\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \qquad (\exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x). \tag{1}$$

La condition d'uniformité en y est liée à la localisation des zéros de la fonction ζ de Riemann : Hildebrand montre que si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors l'estimation (1) a lieu lorsque $(\log x)^{2+\varepsilon} \leq y$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé ; mais également que la réciproque est vraie.

Le terme d'erreur dans (1) est optimal pour le terme principal $\rho(u)$; il est parfois utile de travailler avec une approximation plus précise, quitte à avoir un terme principal moins explicite. Saias, se basant sur des travaux de De Bruijn, montre qu'en définissant $\Lambda(x,y)$ par la formule

$$\Lambda(x,y) := \begin{cases} x\int_{0-}^{+\infty}\rho(u-v)\mathrm{d}(\lfloor y^v\rfloor/y^v) & \text{si } x\notin\mathbf{N}, \\ \Lambda(x+0,y) & \text{sinon} \end{cases}$$

on a l'estimation plus précise

$$\Psi(x,y) = \Lambda(x,y)\{1+O_\varepsilon(\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\})\} \qquad (\exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\}\le y\le x).$$

Sans une hypothèse forte sur les zéros de la fonction ζ, les méthodes menant aux résultats ci-dessus ne fournissent pas d'estimation de $\Psi(x,y)$ lorsque $y=(\log x)^\kappa$ pour $\kappa\in\,]2,\infty[$ fixé, par exemple. Hildebrand et Tenenbaum établissent une formule qui a l'avantage d'être un équivalent sous des conditions très générales en x et y, concédant à cela un terme principal qui dépend de façon plus implicite de x et y. Le *point-selle* $\alpha(x,y)$ est défini comme l'unique solution réelle positive à l'équation

$$\sum_{p\le y}\frac{\log p}{p^\alpha-1} = \log x. \tag{2}$$

En définissant pour tout $u\ge 1$ le réel $\xi=\xi(u)$ comme étant la solution de $(\mathrm{e}^\xi-1)/\xi=u$, le théorème des nombres premiers permet d'estimer le membre de gauche de (2) et d'en déduire

$$(1-\alpha(x,y))\log y = \xi(u)+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{\log x}{y}+\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}\Big)$$

lorsque $y\ge\log x$. On définit également pour $\mathfrak{Re}\, s>0$ les fonctions

$$\zeta(s,y) := \prod_{p\le y}(1-p^{-s})^{-1}, \qquad \phi_2(s,y) := \sum_{p\le y}\frac{p^s(\log p)^2}{(p^s-1)^2}.$$

La fonction $s\mapsto\zeta(s,y)$ est la série de Dirichlet associée à la fonction caractéristique des entiers y-friables, tandis que $s\mapsto\phi_2(s,y)$ est la dérivée seconde de $s\mapsto\log\zeta(s,y)$. Hildebrand et Tenenbaum obtiennent le résultat suivant : lorsque $2\le y\le x$, on a

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha,y)}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{\log y}{y}\Big)\Big\}. \tag{3}$$

Un grand intérêt de cette formule est qu'elle fournit un équivalent dès que $y,u\to\infty$. Par ailleurs, la dépendance en x est facile à appréhender dans la mesure où on contrôle les variations de α : on a par exemple $\Psi(x,y)=x^{\alpha+o(1)}$ lorsque $x,y\to\infty$.

La philosophie qui sous-tend la théorie multiplicative des nombres est que les structures multiplicative et additive des entiers sont dans une certaine mesure indépendantes. Il est donc naturel de s'intéresser à la stabilité de l'ensemble des entiers friables par l'addition, ou par translation d'une quantité fixe. La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la quantité :

$$N(x,y) := \operatorname{card}\,\{(a,b,c)\in S(x,y)^3 \mid a+b=c\}$$

suivant des travaux de Lagarias–Soundararajan [LS11] et La Bretèche–Granville [dlBG12]. La seconde partie est consacrée à l'étude de la quantité

$$T_f(x,y) := \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ n>1}} f(n-1)$$

pour certaines fonctions $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$, en se fondant sur des travaux de Basquin [Bas10], Harper [Har12a] et Fouvry–Tenenbaum [FT90, FT96]. Le cas $f(n) = \tau(n)$ la fonction nombre de diviseurs premiers sera l'objet d'un traitement particulier.

Les méthodes que l'on utilise dans ce travail reposent sur la précision avec laquelle on sait répondre aux deux questions suivantes :

– étant donné un entier $d \leq x$, que peut-on dire de $\Psi(x/d, y)$ par rapport à $\Psi(x, y)$?
– étant donné deux entiers a et q premiers entre eux, que peut-on dire du nombre d'entiers dans $S(x, y)$ qui sont congrus à a modulo q, par rapport à $\Psi(x, y)$?

On présente quelques heuristiques pour expliquer les réponses attendues. Dans le prolongement des travaux de Hildebrand et Tenebaum [HT86], La Bretèche et Tenenbaum obtiennent dans [dlBT05b, théorème 2.4] une réponse très satisfaisante en pratique à la première question : dans une large mesure, lorsque d n'est pas trop grand, on a

$$\Psi(x/d, y) \approx d^{-\alpha(x,y)}\Psi(x, y). \tag{4}$$

Ceci s'interprète par le fait que dans le terme principal du membre de droite de (3), le terme prépondérant est x^α. La deuxième question est plus délicate. On note pour a, q entiers et $(a, q) = 1$,

$$\Psi(x, y; a, q) := \operatorname{card} \{n \in S(x, y) \mid n \equiv a \pmod q\},$$

$$\Psi_q(x, y) := \operatorname{card} \{n \in S(x, y) \mid (n, q) = 1\}.$$

La formule d'inversion de Möbius et l'heuristique (4) suggèrent

$$\Psi_q(x, y) \approx \prod_{\substack{d|q \\ P^+(d)\leq y}} (1 - p^{-\alpha})\Psi(x, y)$$

lorsque q n'a pas trop de facteurs premiers. Sachant cela, l'heuristique naturelle pour $\Psi(x, y; a, q)$ est

$$\Psi(x, y; a, q) \approx \frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x, y),$$

lorsque q n'est pas trop grand.

L'étude de $N(x, y)$ est abordée par Lagarias–Soundararajan [LS11] et La Bretèche–Granville [dlBG12]. Le point de départ est la méthode du cercle :

$$N(x, y) = \int_0^1 E(x, y; \vartheta)^2 E(x, y; -\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$$

où l'on a posé

$$E(x, y; \vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} \mathrm{e}^{2\pi i n\vartheta}.$$

Heuristiquement, si on écrit $\vartheta = a/q + \eta$ avec η petit, et $q = q_0 q_1$ où q_0 est le plus grand diviseur y-friable de q, on s'attend à ce que

$$E(x, y; \vartheta) \overset{?}{\approx} \Psi(x, y)\frac{\mu(q_1)q_0^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \prod_{p|q_0}(1 - p^{\alpha-1}) \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i t x\vartheta}\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$$

et en injectant cette approximation dans la méthode du cercle, on obtient l'heuristique

$$N(x, y) \overset{?}{\approx} M(x, y) := \mathfrak{S}_0(\alpha, y)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x, y)^3}{x}$$

avec

$$\mathfrak{S}_0(\alpha, y) := \prod_{p \leq y} \Big(1 + \frac{(p - p^\alpha)^3}{p(p-1)^2(p^{3\alpha-1} - 1)}\Big) \prod_{p > y} \Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big),$$

$$\mathfrak{S}_1(\alpha) := \int_0^1 \int_0^{1-t_1} \alpha^3(t_1 t_2(t_1 + t_2))^{\alpha-1} \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1.$$

En faisant formellement la substitution $\alpha = 1$, ce qui correspond au cas $y = x$, le terme heuristique est $\approx x^2/2$ comme attendu. Si l'on modifie la définition de $N(x, y)$ pour imposer que les composantes a, b, c soient premières entre elles :

$$N^*(x, y) := \mathrm{card}\ \big\{(a, b, c) \in S(x, y)^3 \mid a + b = c,\ \mathrm{pgcd}(a, b, c) = 1\big\}$$

alors l'heuristique devient $N^*(x, y) \overset{?}{\approx} M^*(x, y) := \zeta(3\alpha - 1, y)^{-1} M(x, y)$. Lagarias et Soundararajan [LS11], motivés par l'obtention de la relation $N^*(x, y) \to \infty$ pour des valeurs de y aussi petites que possibles, considèrent la quantité suivante :

$$N(x, y; \Phi) := \sum_{\substack{P^+(abc) \leq y \\ a+b=c}} \Phi\Big(\frac{a}{x}\Big)\Phi\Big(\frac{b}{x}\Big)\Phi\Big(\frac{c}{x}\Big),$$

où $\Phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ est une fonction à support compact. On définit de même la quantité $N^*(x, y; \Phi)$, où la somme est restreinte aux a, b, c premiers entre eux. En définissant

$$\mathfrak{S}_1(\alpha, \Phi) := \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^3(t_1 t_2(t_1 + t_2))^{\alpha-1} \Phi(t_1)\Phi(t_2)\Phi(t_1 + t_2) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2,$$

les heuristiques précédentes suggèrent

$$N(x, y; \Phi) \overset{?}{\approx} M(x, y; \Phi) := \mathfrak{S}_0(\alpha, y)\mathfrak{S}_1(\alpha, \Phi)\Psi(x, y)^3/x,$$

$$N^*(x, y; \Phi) \overset{?}{\approx} M^*(x, y; \Phi) := \zeta(3\alpha - 1)^{-1} M(x, y; \Phi).$$

Lagarias et Soundararajan [LS12] montrent que si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, c'est-à-dire que pour tout caractère χ de Dirichlet on a

$$L(s, \chi) = 0 \Rightarrow \mathfrak{Re}(s) \leq 0 \text{ ou } \mathfrak{Re}(s) = 1/2,$$

alors lorsque $(\log x)^{8+\varepsilon} \leq y \leq \exp\{(\log x)^{1/2-\varepsilon}\}$ et pour toute fonction $\Phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ à support compact inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$N(x, y; \Phi) = M(x, y; \Phi)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log\log y}{\log y}\Big)\Big\}, \qquad N(x, y) \geq (1 + o(1))M(x, y)$$

$$N^*(x, y; \Phi) = M^*(x, y; \Phi)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log y)^{1/4}}\Big)\Big\}, \qquad N^*(x, y) \geq (1 + o(1))M^*(x, y).$$

Dans le premier chapitre on précise ces résultats.

Théorème 0.1. *Supposons l'hypothèse de Riemann généralisée. Lorsque $\Phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ est une fonction à support compact inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, et lorsque $(\log x)^{8+\varepsilon} \leq y \leq x$, on a*

$$N(x, y; \Phi) = M(x, y; \Phi)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}, \qquad N(x, y) \sim M(x, y) \quad (x, y \to \infty),$$

$$N^*(x, y; \Phi) = M^*(x, y; \Phi)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}, \qquad N^*(x, y) \sim M^*(x, y) \quad (x, y \to \infty.)$$

Il est à noter que l'hypothèse sur Φ ne permet pas d'approcher trivialement la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$ par le haut.

La méthode employée est une variante de la méthode du col, à la façon de Hildebrand et Tenenbaum [HT86]. Le point essentiel est l'estimation des sommes

$$\Psi_0(x,y;\chi,\eta) := \sum_{P^+(n)\leq y} \chi(n)\mathrm{e}^{2\pi i n\eta}\Phi(n/x) \tag{5}$$

où χ est un caractère de Dirichlet. La formule de Perron, qui est un avatar de la transformation de Fourier, fournit pour tout $\kappa > 0$

$$\Psi_0(x,y;\chi,\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} L(s,\chi;y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\mathrm{d}s \tag{6}$$

avec

$$L(s,\chi) := \sum_{P^+(n)\leq y}\chi(n)n^{-s} = \prod_{p\leq y}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}, \qquad \check{\Phi}_0(\lambda,s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{2\pi i\lambda t}t^{s-1}\Phi(t)\mathrm{d}t.$$

L'argument de Lagarias et Soundararajan, basé sur la méthode du col, consiste à déformer le contour dans l'intégrale du membre de droite de (6) de façon à tenir compte des comportements spécifiques de chacun des termes de l'intégrant. C'est là qu'intervient l'hypothèse de Riemann généralisée. La contribution principale vient du cas où χ est principal et $|\eta x|$ est petit en un certain sens. Les améliorations apportées dans cette thèse à leur argument consistent en un choix plus adéquat du contour, qui permet l'extention du domaine pour les grandes valeurs de y, ainsi qu'en une étude plus précise de la contribution principale afin de parvenir au terme d'erreur $O(1/u)$, typique de la méthode du col. Enfin, l'étude plus générale des sommes

$$N(A,B,C,y;\Phi) := \sum_{\substack{P^+(abc)\leq y\\ a+b=c}} \Phi\Big(\frac{a}{A}\Big)\Phi\Big(\frac{b}{B}\Big)\Phi\Big(\frac{c}{C}\Big)$$

permet, par un argument basé sur la relation

$$N(x,y) = \sum_{k_1,k_2,k_3\geq 0} N(x/2^{k_1},x/2^{k_2},x/2^{k_3},y;\mathbf{1}_{]1/2,1]}),$$

d'obtenir une estimation asymptotique de $N(x,y)$: la fonction $\mathbf{1}_{]1/2,1]}$ peut être approchée par le haut par une fonction lisse dont le support est compact et ne contient pas 0.

Le premier chapitre a donné lieu à la publication [Dra13].

La Bretèche et Granville obtiennent dans [dlBG12], sans supposer l'hypothèse de Riemann généralisée, l'estimation

$$N(x,y) = M(x,y)\{1+O(\log(u+1)/\log y)\}, \qquad (\exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.)$$

Cela est établi à l'aide des majorations de sommes friables d'exponentielles de La Bretèche [dlB98]. Dans le deuxième chapitre, en adaptant la méthode de Lagarias et Soundararajan ainsi que les calculs du premier chapitre, on obtient une extension du domaine de validité de cette estimation :

Théorème 0.2. *Il existe $c>0$ telle que lorsque $\exp\{c(\log x)^{1/2}\log\log x\} \leq y \leq x$, on ait*

$$N(x,y) = M(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Par rapport aux calculs du premier chapitre, le fait que l'on ne suppose plus l'hypothèse de Riemann généralisée se répercute sur la qualité des termes d'erreur venant de l'estimation des sommes analogues de (5). Dans ce contexte, la méthode de Lagarias et Soundararajan permet d'estimer $E(x, y; \vartheta)$ lorsque $\vartheta = a/q + \eta$, et q et $|\eta|x$ ne sont pas trop grands : il apparaît une condition de la forme

$$\max\{q, |\eta|x\} \leq \exp\{c\sqrt{\log x}\}$$

pour un certain $c > 0$. La contribution des ϑ qui ne vérifiant pas ceci, les "arcs mineurs", est majorée par un autre argument, basé sur la propriété de bonne factorisation des entiers friables [FT91, théorème 13].

L'hypothèse de Riemann généralisée est remplacée par les résultats connus sur la localisation des zéros des fonctions L de Dirichlet. Cette approche emprunte aux calculs de Soundararajan [Sou08] et Harper [Har12b, Har12a]. Les éventuels caractères χ dits "de Siegel", dont la fonction L associée aurait un zéro β proche de 1, sont l'objet d'un traitement particulier fondé sur la proximité entre les propriétés analytiques de $L(s, \chi)$ et de la fonction $\zeta(s + 1 - \beta)^{-1}$. Lorsque y est suffisamment petit, leur contribution est majorée sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir des minorations de $1 - \beta$. En effet, par le simple fait qu'un entier y-friable a typiquement d'autant plus de facteur premiers que y est petit, des compensations apparaissent dans la somme $\sum_{n \in S(x,y)} \chi(n)$ quand bien même on aurait $\chi(p) = -1$ pour une proportion anormalement grande de nombres premiers p.

Le travail du deuxième chapitre a été soumis pour publication.

La deuxième partie de cette thèse concerne les sommes

$$T_f(x, y) = \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n > 1}} f(n - 1).$$

Loiperdinger et Shparlinski font dans [LS10] une étude concentrée sur le cas $f(n) = \varphi(n)$ la fonction indicatrice d'Euler. Leurs résultats sont précisés par Basquin [Bas10], qui étend le choix de f à la classe des fonctions multiplicatives vérifiant la condition

$$\lambda(n) := \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d) \ll n^{-\beta} \tag{7}$$

pour un certain $\beta > 0$. La fonction λ est liée au comportement en moyenne de f puisque sous cette condition, la limite $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$ existe et vaut $\sum_{q \geq 1} \lambda(q)/q$. Basquin montre que lorsque f est multiplicative et que λ vérifie la condition (7), alors on a

$$T_f(x, y) = \Psi(x, y) \sum_{q \geq 1} \frac{\lambda(q)}{q} + O\Big(\frac{\log(u + 1)}{\log y}\Big) \qquad (\exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.)$$

La constante implicite dépend de β, ε et de la constante implicite dans (7). On remarque que dans le domaine en (x, y) où cette relation est énoncée, on a $\alpha \approx 1$.

Dans le troisième chapitre, on étudie ce problème dans l'optique d'obtenir une estimation pour $T_f(x, y)$ qui soit valide pour des valeurs de y aussi petites que possible. Le point de départ est la relation valable pour $2 \leq y \leq x$

$$T_f(x, y) = \sum_{q \geq 1} \lambda(q) \{\Psi(x, y; 1, q) - 1\}.$$

L'heuristique attendue pour cette quantité est

$$T_f(x,y) \approx \sum_{q\le x} \frac{\lambda(q)\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)} \overset{?}{\approx} \Psi(x,y) \sum_{q\le x} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \prod_{\substack{p\mid q\\ p\le y}} (1-p^{-\alpha}).$$

Cette approche nécessite de savoir montrer une majoration du type

$$\sum_{q\le x} |\lambda(q)| \big|\Psi(x,y;1,q) - \varphi(q)^{-1}\Psi_q(x,y)\big| = o\Big(\Psi(x,y)\sum_{q\le x}\frac{|\lambda(q)|}{\varphi(q)}\Big). \tag{8}$$

La situation est similaire à celle du théorème de Bombieri–Vinogradov. Précisant des résultats de Wolke [Wol73], Granville [Gra93a] et Fouvry–Tenenbaum [FT96], Harper [Har12a] montre que l'on a

$$\sum_{q\le Q} \max_{(a,q)=1} \big|\Psi(x,y;a,q) - \varphi(q)^{-1}\Psi_q(x,y)\big| = o(\Psi(x,y)) \tag{9}$$

lorsque $(\log x)^c \le y \le x$ et $Q \le \sqrt{\Psi(x,y)}/(\log x)^8 = x^{\alpha/2+o(1)}$, pour un certain $c>0$. Cela permet de traiter les termes $q \le \sqrt{\Psi(x,y)}/(\log x)^8$ dans le membre de gauche de (8). On peut alors espérer contrôler la contribution des grandes valeurs de q au membre de gauche de (8) grâce à des hypothèses sur λ. Dans le troisième chapitre, on montre le résultat suivant.

Théorème 0.3. *Lorsque la série* $\sum_{q\ge1} |\lambda(q)|/q^{1-\beta}$ *converge pour un certain* $\beta>0$ *et lorsque* λ *est soit multiplicative, soit bornée, alors il existe* $c=c(\beta)>0$ *tel que*

$$T_f(x,y) = \Psi(x,y)\sum_{q\ge1}\frac{\lambda(q)}{\varphi(q)}\prod_{\substack{p\mid q\\ p\le y}}(1-p^{-\alpha}) + O\Big(\Psi(x,y)\min\Big\{\frac{\log(u+1)}{\log y}, \frac{1}{u}\Big\}\Big)$$

lorsque $(\log x)^c \le y \le x$.

On précise également une étude de Fouvry et Tenenbaum [FT96] sur le nombre de facteurs premiers des entiers friables translatés. Cela revient à l'estimation de $T_f(x,y)$ pour la fonction multiplicative $f(n) = \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ et $\vartheta \in \mathbf{R}$. Cette fonction ne vérifiant pas les hypothèses précédentes, une analyse plus précise est nécessaire. Fouvry et Tenenbaum montrent que pour tout $A>0$ fixé, on a

$$\mathrm{card}\Big\{n\in S(x,y), n>1 \;\Big|\; \frac{\omega(n-1)-\log\log x}{\sqrt{\log\log x}} \le t\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-v^2/2}\mathrm{d}v + O\Big(\frac{\log\log\log x}{\sqrt{\log\log x}}\Big)$$

lorsque $t\in\mathbf{R}$ et $\exp\{\log x/(\log x)^A\} \le y \le x$. Cette relation pour $y=x$ est le théorème d'Erdös-Kac. Dans la dernière section du troisième chapitre, on montre que cette estimation a en fait lieu lorsque $(\log x)^c \le y \le x$ pour un certain $c>0$.

Dans le dernier chapitre on s'intéresse au cas $f(n)=\tau(n)$ la fonction nombre de diviseurs. On a dans ce cas $\lambda(n)=1$, la fonction f n'a pas de valeur moyenne finie sur les entiers et il est donc nécessaire d'adapter l'approche précédente. La méthode de l'hyperbole de Dirichlet permet de se ramener à l'étude de la quantité

$$\sum_{q\le\sqrt{x}} \Big(\Psi(x,y;1,q) - \varphi(q)^{-1}\Psi_q(x,y)\Big)$$

ainsi que d'une autre quantité analogue. L'évaluation de type Bombieri–Vinogradov qui conduit à (9) ne fournit rien de non trivial lorsque $Q = \sqrt{x}$. Mais on peut espérer tirer parti du fait que l'on ne somme plus les maximums des termes d'erreurs dans les progressions arithmétiques modulo q. Cela est du ressort de la méthode de "dispersion" de Linnik, étudiée dans divers contextes par Fouvry [Fou82, Fou84, Fou85], Fouvry–Iwaniec [FI80, FI83] et Bombieri–Friedlander–Iwaniec [BFI86, BFI87, BFI89]. Comme application de ces travaux, on peut citer la majoration du nombre de nombres premiers jumeaux de Chen [Che78] (*cf.* [HSF10] pour le meilleur résultat publié actuellement), ou la preuve récente de Zhang [Zha13] de l'infinitude d'écarts bornés entre nombres premiers consécutifs, basée sur les méthodes de Goldston–Pintz–Yıldırım [GPY09]. Fouvry et Tenenbaum obtiennent dans [FT96] pour tout $a \in \mathbf{N} \smallsetminus \{0\}$ l'estimation

$$\sum_{\substack{q \le x^{3/5-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} \Big| \Psi(x,y;a,q) - \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)} \Big| \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

lorsque $y \le x^c$ pour un certain $c > 0$ et tous $\varepsilon, A > 0$ fixés. Le membre de droite est $o(\Psi(x,y)\log x)$ dans un domaine de la forme

$$\exp\Big\{(\eta + o(1))\frac{\log x \log\log\log x}{\log\log x}\Big\} \le y$$

pour un certain $\eta = \eta(A) > 0$.

Dans le dernier chapitre, en adaptant les calculs de Fouvry–Iwaniec [FI83] et de Bombieri–Friedlander–Iwaniec [BFI86, theorem 4], il est montré que pour tous $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbf{N} \smallsetminus \{0\}$ fixés, l'estimation

$$\sum_{\substack{q \le x^{3/5-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} \Big| \Psi(x,y;a,q) - \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)} \Big| \ll_{\varepsilon,a} \Psi(x,y)\{\mathrm{e}^{-\delta u/(\log u)^2} + y^{-\delta}\}$$

est valable lorsque $(\log x)^c \le y \le x^{1/c}$, pour deux réels $c, \delta > 0$ pouvant dépendre de ε. Il en résulte, concernant la somme $T_\tau(x,y)$, le résultat suivant :

Théorème 0.4. *Il existe $c > 0$ telle que l'on ait*

$$\sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n>1}} \tau(n-1) = \prod_p \Big(1 - \frac{p^{-\alpha} - p^{-1}}{p-1}\Big)\Psi(x,y)\log x\Big\{1 + O\Big(\min\Big\{\frac{\log(u+1)}{\log y}, \frac{1}{u}\Big\}\Big)\Big\}$$

lorsque $(\log x)^c \le y \le x$.

La méthode de dispersion est basée sur la détection de la congruence $n \equiv a \pmod q$ par la formule de Poisson. Sous certains conditions de régularité sur la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{n \equiv a \pmod q} f(n) = \frac{1}{q}\sum_{h \in \mathbf{Z}} \widehat{f}\Big(\frac{h}{q}\Big)\mathrm{e}^{2\pi i a h/q} \tag{10}$$

où $\widehat{f}(w) := \int_{\mathbf{R}} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi i t w}\mathrm{d}t$ désigne la transformée de Fourier de f. On ne peut espérer approcher trivialement la fonction indicatrice des entiers friables par une fonction régulière pour laquelle la formule de Poisson ci-dessus fournit de bons résultats. Il est donc adéquat d'approcher en premier lieu la fonction indicatrice des friables par des produits de convolution, c'est-à-dire de se ramener à l'étude de quantités de la forme

$$\sum_{\substack{Q<q\leq 2Q\\(q,a)=1}}\Big|\sum_{mn\equiv a\pmod q}\alpha_m\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(mn,q)=1}\alpha_m\beta_n\Big| \tag{11}$$

les suites (α_m) et (β_n) étant à supports respectifs dans $]M,2M]$ et $]N,2N]$, pour deux réels $M,N\geq 1$ avec $MN=x$. Cela est possible lorsque y est suffisamment petit, par exemple $y\leq x^{1/c}$. On applique ensuite l'inégalité de Cauchy–Schwarz afin de remplacer α_m par un poids lisse : ce faisant, on gagne en flexibilité tout en conservant une partie de l'information arithmétique sur la suite de départ. La quantité (11) est

$$\ll\Big\{Q\sum_m|\alpha_m|^2\Big\}^{1/2}\Bigg\{\sum_{\substack{Q<q\leq 2Q\\(q,a)=1}}\sum_m f(m/M)\Big|\sum_{mn\equiv a\pmod q}\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(mn,q)=1}\beta_n\Big|^2\Bigg\}^{1/2}$$

pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $[1/2,3]$ et majorant la fonction indicatrice de l'intervalle $[1,2]$. La congruence $m\equiv an^{-1}\pmod q$ est alors détectée efficacement grâce à la formule de Poisson (10).

Cependant, l'erreur commise lors de l'utilisation de l'inégalité de Cauchy–Schwarz est de l'ordre d'une petite puissance de x lorsque $y=(\log x)^c$: il est donc essentiel de pouvoir montrer une majoration du type

$$\sum_{\substack{Q<q\leq 2Q\\(q,a)=1}}\sum_m f(m/M)\Big|\sum_{mn\equiv a\pmod q}\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(mn,q)=1}\beta_n\Big|^2\ll MN^2Q^{-1}x^{-\eta}$$

pour un certain $\eta>0$ fixé. La méthode de dispersion fournit une telle majoration à la condition d'avoir

$$\sum_{Q<q\leq 2Q}\sum_{\substack{0<b<q\\(b,q)=1}}\Big|\sum_{n\equiv b\pmod q}\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(n,q)=1}\beta_n\Big|^2\ll N^2Q^{-1}x^{-\eta} \tag{12}$$

où le membre de gauche représente la contribution du terme principal $h=0$ dans la formule de Poisson (10). Une telle majoration nécessite des hypothèses très fortes sur la répartition de la suite (β_n) dans les progression arithmétiques de petits modules. L'approche consistant à détecter dans (12) la congruence $n\equiv a\pmod q$ à l'aide de caractères de Dirichlet est entravée par la contribution des caractères de conducteur $\leq x^{2\eta}$. Mais leur contribution à l'objet initial (11) est bien majorée : cela résulte d'un calcul de Harper [Har12a]. On peut donc se ramener à l'étude de l'objet suivant

$$\sum_{\substack{Q<q\leq 2Q\\(q,a)=1}}\Big|\sum_{mn\equiv a\pmod q}\alpha_m\beta_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi\pmod q\\\mathrm{cond}(\chi)\leq x^{2\eta}}}\sum_{(mn,q)=1}\alpha_m\beta_n\chi(mn)\overline{\chi(a)}\Big|$$

qui est l'analogue de (11), où la contribution des caractères de petits conducteurs est retirée. La méthode de dispersion permet alors de montrer que cela est $O(x^{1-\eta})$, ce qui est acceptable dans un domaine de la forme $(\log x)^c\leq y$.

La plus grande partie du travail consiste à montrer que la contribution des termes découlant de l'application de la formule (10) et correspondant à $h \neq 0$ sont bien contrôlés. Cela fait intervenir des sommes de Kloosterman, de la forme

$$K(a,b;q) = \sum_{\substack{0<n<q \\ (n,q)=1}} \exp\{2\pi i(an + b\overline{n})/q\}$$

où $\overline{n}$ est un inverse de n modulo q. Ces sommes sont majorées, soit individuellement par la majoration de Weil [Wei48], soit en moyenne grâce aux résultats de Deshouillers–Iwaniec [DI83].

Notations

On adopte la notation de Vinogradov : on écrira $f \ll g$ s'il existe $C > 0$ absolue telle que $|f| \leq Cg$. Pour préciser s'il y a lieu la dépendance de C en divers paramètres comme ε, A, ils seront notés en indice comme dans $\ll_\varepsilon$ ou $\ll_{\varepsilon,A}$.

Dans toute la suite $\mathbf{N}$ désignera l'ensemble des entiers strictement positifs. Sauf mention contraire, la lettre p désignera un nombre premier.

Première partie

Sommes friables d'entiers friables

Chapitre 1

Sur les solutions friables de l'équation $a + b = c$

1.1 Introduction

La conjecture *abc* formulée en 1985 par Masser et Oesterlé (voir par exemple [Oes88]) relie la taille des solutions à l'équation

$$a + b = c \tag{1.1}$$

avec leur *radical* $R(a, b, c) = \prod_{p|abc} p$ de la façon suivante.

Conjecture 1.1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il n'existe qu'un nombre fini de solutions* (a, b, c) *avec* $\operatorname{pgcd}(|a|, |b|, |c|) = 1$ *à l'équation* (1.1) *sous la condition*

$$R(|a|, |b|, |c|) \leq \max(|a|, |b|, |c|)^{1-\varepsilon}.$$

On peut approcher le problème en comptant les solutions de (1.1) suivant la taille de leurs facteurs premiers. C'est l'objet d'un travail de Lagarias et Soundararajan [LS12, LS11]. On note respectivement $P^+(n)$ et $P^-(n)$ le plus grand et le plus petit facteur premier de n (avec les conventions $P^+(1) = 1$ et $P^-(1) = \infty$), ainsi que

$$S(x, y) = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq x \text{ et } P^+(n) \leq y\}$$

$$\Psi(x, y) = |S(x, y)|$$

$$u = u_x := \frac{\log x}{\log y}$$

$$H(u) := \exp(u/\log^2(u + 1)) \quad \text{pour } u \geq 1.$$

On note $\alpha = \alpha_x = \alpha(x, y)$ (le *point-selle*) l'unique solution positive de

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log(p)}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Là où α et u sont notés sans indice, il est convenu que la valeur du premier paramètre est x. La valeur du second paramètre, elle, est toujours y. Lorsque x et y tendent vers l'infini tout en vérifiant $(\log x)^2 \leq y \leq x$, on a

$$1 - \alpha \sim (\log u)/\log y.$$

On étudie le comportement asymptotique du nombre de solutions à l'équation (1.1) qui sont y-friables et de taille inférieure à x

$$N(x,y) := \sum_{\substack{a,b,c\in S(x,y)\\ a+b=c}} 1$$

ainsi que du nombre de ces solutions qui sont *primitives*, c'est-à-dire avec à composantes premières entre elles

$$N^*(x,y) := \sum_{\substack{a,b,c\in S(x,y)\\ (a,b,c)=1\\ a+b=c}} 1.$$

Le comportement asymptotique de $N(x,y)$ a été étudié par de la Bretèche et Granville dans [dlBG12] pour les grandes valeurs de y.

Théorème 1.1 ([dlBG12], théorème 1.1)**.** *Soit* $\varepsilon > 0$*. Lorsque* x *et* y *vérifient*

$$\exp((\log x)^{2/3+\varepsilon}) \leq y \leq x$$

on a uniformément

$$N(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right).$$

Dans le cadre de l'étude de la conjecture *abc* cependant, il apparaît intéressant d'obtenir des résultats valables lorsque y est de l'ordre d'une puissance de $\log x$. On travaille pour cela avec des sommes modifiées, où la condition $a,b,c \leq x$ est lissée. Étant donnée une fonction test $\Phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{C}$ à support compact, on étudie le comportement du nombre de solutions pondérées

$$N(x,y;\Phi) := \sum_{\substack{P^+(abc)\leq y\\ a+b=c}} \Phi\left(\frac{a}{x}\right)\Phi\left(\frac{b}{x}\right)\Phi\left(\frac{c}{x}\right)$$

ainsi que la quantité associée pour les solutions primitives

$$N^*(x,y;\Phi) := \sum_{\substack{P^+(abc)\leq y\\ (a,b,c)=1\\ a+b=c}} \Phi\left(\frac{a}{x}\right)\Phi\left(\frac{b}{x}\right)\Phi\left(\frac{c}{x}\right).$$

La fonction Φ est autant que possible utilisée comme une approximation de $\mathbf{1}_{]0,1]}$, la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$.

De même que dans [LS12], on se place dans la situation où l'hypothèse de Riemann est vraie dans la version généralisée suivante.

Conjecture 1.2. *(Hypothèse de Riemann généralisée) Les zéros non triviaux de la fonction* ζ *de Riemann ainsi que ceux de toutes les fonctions* L *de Dirichlet ont pour partie réelle* $1/2$.

Si $2/3 < \alpha \leq 1$ et si Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, à support compact dans $\mathbf{R}_+$, alors on définit

$$\mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha) := \alpha^3\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(t_1)\Phi(t_2)\Phi(t_1+t_2)(t_1t_2(t_1+t_2))^{\alpha-1}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

$$\mathfrak{S}_1(\alpha) := \prod_p \left(1 + \frac{p-1}{p(p^{3\alpha-1}-1)} \left(\frac{p-p^\alpha}{p-1}\right)^3\right).$$

On note également $\mathfrak{S}_1^*(\alpha, y) := \mathfrak{S}_1(\alpha)\zeta(3\alpha-1, y)^{-1}$ et $\mathfrak{S}_1^*(\alpha) := \mathfrak{S}_1(\alpha)\zeta(3\alpha-1)^{-1}$, avec la notation, pour tout $s \in \mathbf{C}$ de partie réelle strictement positive,

$$\zeta(s, y) := \sum_{P^+(n)\leq y} n^{-s} = \prod_{p\leq y} (1-p^{-s})^{-1}.$$

Remarquons que $\mathfrak{S}_0(\Phi, \alpha)$ et $\mathfrak{S}_1(\alpha)$ sont des fonctions continues de α, on a donc en particulier

$$\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]}, \alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{\log u}{\log y}\right)$$

Théorème 1.2 ([LS12], théorèmes 2.1 et 2.2)**.** *Soit $\varepsilon > 0$ et Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0, \infty[$. Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors pour tous x et y vérifiant*

$$2 \leq (\log x)^{8+\varepsilon} \leq y \leq \exp((\log x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$$

on a

$$N(x, y; \Phi) = \mathfrak{S}_0(\Phi, \alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x, y)^3}{x}\left\{1 + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right\}$$

$$N^*(x, y; \Phi) = \mathfrak{S}_0(\Phi, \alpha)\mathfrak{S}_1^*(\alpha, y)\frac{\Psi(x, y)^3}{x}\left\{1 + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{1}{(\log y)^{1/4}}\right)\right\}.$$

Les termes principaux des estimations des Théorèmes 1.2 et 1.1 sont donc compatibles en vertu de la remarque précédente ; mais leurs intervalles de validités ne se rejoignent pas. En premier lieu, on présente ici une modification de l'argument de Lagarias et Soundararajan qui permet d'une part de combler cet intervalle non résolu, d'autre part d'améliorer le terme d'erreur. Définissons pour tout $\kappa \geq 1$ et $c_0 > 0$ les domaines

$$\mathcal{D}(\kappa) := \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2 \leq (\log x)^\kappa \leq y \leq x\right\} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{D}^*(\kappa, c_0) := \mathcal{D}(\kappa) \cap \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (\log y)H(u)^{-c_0} \leq 1\right\} \tag{1.3}$$

Notre résultat est le suivant.

Théorème 1.3. *Il existe une constante absolue $c_0 > 0$ telle que pour tous $\varepsilon > 0$ et Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0, \infty[$, si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors pour tout (x, y) dans le domaine $\mathcal{D}^*(8+\varepsilon, c_0)$ on a*

$$N(x, y; \Phi) = \mathfrak{S}_0(\Phi, \alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x, y)^3}{x}\left\{1 + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{1}{u}\right)\right\} \tag{1.4}$$

$$N^*(x, y; \Phi) = \mathfrak{S}_0(\Phi, \alpha)\mathfrak{S}_1^*(\alpha, y)\frac{\Psi(x, y)^3}{x}\left\{1 + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{1}{u}\right)\right\}. \tag{1.5}$$

On s'attend, mais ce ne sera pas étudié ici, à ce que la technique de La Bretèche et Granville [dlBG12] puisse être utilisée pour obtenir une estimation de $N(x, y; \Phi)$ valable sous les hypothèses du théorème 1.1. Cela impliquerait que les estimations (1.4) et (1.5) soient valables dans $\mathcal{D}(8+\varepsilon)$ tout entier. On note que, sous les hypothèses du Théorème 1.3, lorsque x et y tendent vers l'infini,

$$1-\frac{1}{8+\varepsilon}+o(1)\leq\alpha<1.$$

Les termes d'erreurs du Théorème 1.3 sont de même nature que le terme d'erreur identique obtenu par Hildebrand et Tenenbaum [HT86] dans l'estimation de $\Psi(x,y)$ par la méthode du col.

L'hypothèse sur Φ est contraignante en cela qu'elle ne permet pas de prendre des majorants de la fonction $\mathbf{1}_{]0,1]}$ par le haut. On a en revanche comme corollaire direct les minorations asymptotiques suivantes.

Théorème 1.4 ([LS12], corollaire des théorèmes 2.1 et 2.2)**.** *Soit $\varepsilon>0$. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant*

$$(\log x)^{8+\varepsilon}\leq y\leq\exp((\log x)^{\frac12-\varepsilon}),\quad \textit{on a}$$

$$N(x,y)\geq\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\left\{1+o_\varepsilon(1)\right\}$$
$$N^*(x,y)\geq\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1^*(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\left\{1+o_\varepsilon(1)\right\}.$$

On présente un raisonnement qui permet de parvenir aux égalités asymptotiques.

Théorème 1.5. *Soit $\varepsilon>0$. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, lorsque $(x,y)\in\mathcal{D}(8+\varepsilon)$ et x et y tendent vers l'infini on a*

$$N(x,y)=\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\left\{1+o_\varepsilon(1)\right\}\tag{1.6}$$

$$N^*(x,y)=\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1^*(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\left\{1+o_\varepsilon(1)\right\}.\tag{1.7}$$

En particulier, lorsque $\log y/\log\log x\to\infty$, on a

$$N(x,y)\sim\frac{\Psi(x,y)^3}{2x},\qquad N^*(x,y)\sim\frac{\Psi(x,y)^3}{2\zeta(2)x}.$$

Deux éléments ont permis d'améliorer les résultats de Lagarias et Soundararajan : un changement dans le choix d'un contour, et l'utilisation de résultats très précis de La Bretèche et Tenenbaum [dlBT05b] sur le rapport $\Psi(x/d,y)/\Psi(x,y)$.

Remerciements. L'auteur souhaite adresser ses meilleurs remerciements à son directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour sa grande disponibilité et ses nombreux conseils durant la rédaction de cet article, ainsi qu'à Andrew Granville pour sa relecture et ses remarques.

1.2 Rappel de quelques résultats sur les entiers friables

Dans leur article [HT86], Hildebrand et Tenenbaum ont utilisé la méthode du col afin d'étudier $\Psi(x,y)$, en tirant avantage de l'identité

$$\Psi(x,y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\zeta(s,y)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}\tag{1.8}$$

valable pour tout $\sigma > 0$. Il apparaît en effet que si l'on choisit $\sigma = \alpha(x, y)$ alors la contribution principale à l'intégrale entière vient de la partie du contour autour de α, c'est-à-dire les valeurs de s ayant une petite partie imaginaire.

On note $s \mapsto \phi_2(s, y)$ la dérivée seconde de la fonction $s \mapsto \log \zeta(s, y)$. Le résultat principal de Hildebrand et Tenenbaum est contenu dans les deux lemmes suivants.

Lemme 1.1 ([HT86], lemme 10)**.** *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c_1 > 0$ tel que lorsque $(x, y) \in \mathcal{D}(1)$ on ait*

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \zeta(s; y) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O_\varepsilon \left(x^\alpha \zeta(\alpha; y) \left(H(u)^{-c_1} + \exp\left\{ -(\log y)^{3/2 - \varepsilon} \right\} \right) \right).$$

Lemme 1.2 ([HT86], lemme 11)**.** *Lorsque $(x, y) \in \mathcal{D}(1)$ on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \zeta(s; y) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha - i/\log y}^{\alpha + i/\log y} \left| \zeta(s; y) \frac{x^s}{s} \right| |\mathrm{d}s| \left(1 + O\left(\frac{1}{u} \right) \right) \\ &= \frac{x^\alpha \zeta(\alpha; y)}{\alpha \sqrt{2\pi \phi_2(\alpha, y)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{u} \right) \right). \end{aligned}$$

On dispose par ailleurs du résultat élémentaire suivant.

Lemme 1.3. *Lorsque $x \geq y \geq 2$, on a*

$$\log \zeta(\alpha, y) = u \left\{ 1 + O\left(\frac{\log\log(u+2)}{\log(u+2)} \right) \right\}.$$

Cela permet d'écrire dans le même domaine

$$\Psi(x, y) = x^{\alpha + o(1)}. \tag{1.9}$$

On reprend dans la section suivante une partie de la preuve de Hildebrand et Tenenbaum, on cite donc quelques résultats précis concernant l'estimation de l'intégrale (1.8). On se place sur la droite $\mathfrak{Re}\, s = \alpha$ et on note $T_0 = u^{-1/3}/\log y$. Les points de partie imaginaire supérieure à T_0 contribuent de façon négligeable. Quant aux autres, un développement limité permet d'estimer leur contribution. Le lemme suivant permet de traiter le cas des points de partie imaginaire τ vérifiant $1/\log y \leq |\tau| \leq y$.

Lemme 1.4 ([HT86], lemme 8)**.** *Lorsque $1/\log y \leq |\tau| \leq y$, il existe $c_2 > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}(1)$ on ait*

$$\zeta(\alpha + i\tau; y) \ll \zeta(\alpha; y) \exp\left(-c_2 \frac{u\tau^2}{(1-\alpha)^2 + \tau^2} \right).$$

Pour les points de partie imaginaire vérifiant $T_0 \leq |\tau| \leq 1/\log y$ on utilise la majoration suivante, énoncée dans la démonstration du lemme 11 de [HT86].

Lemme 1.5 ([HT86], démonstration du lemme 11)**.** *Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}(1)$ et $\sigma = \alpha$, on a*

$$\int_{T_0 \leq |\tau| \leq 1/\log y} \left| \zeta(s, y) \frac{x^s}{s} \right| \mathrm{d}s \ll \frac{\Psi(x, y)}{u}.$$

Enfin, le lemme suivant est une reformulation du lemme 4 de [HT86].

Lemme 1.6 ([HT86], lemme 4). *On note σ_k ($2 \leq k \leq 4$) la valeur de la dérivée k-ième de la fonction $s \mapsto \log \zeta(s,y)$ en $s=\alpha$. Pour $(x,y) \in \mathcal{D}(1)$ et $s=\alpha+i\tau$ avec $|\tau| \leq T_0$ on a*

$$\log \zeta(s,y) = \log \zeta(\alpha,y) - i\tau \log x - \frac{\tau^2}{2}\sigma_2 - i\frac{\tau^3}{6}\sigma_3 + O(\tau^4\sigma_4).$$

De plus les quantités σ_k vérifient $\sigma_k \asymp u(\log y)^k$.

On note que $\sigma_2 = \phi_2(\alpha,y)$.

Concernant le comportement local de $\Psi(x,y)$, on cite le résultat suivant, dû à La Bretèche et Tenenbaum [dlBT05b].

Lemme 1.7 ([dlBT05b], Théorème 2.4). *Il existe deux constantes absolues b_1 et b_2 et une fonction $b=b(x,y;d)$ satisfaisant $b_1 \leq b \leq b_2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}(1)$ et $d \in \mathbf{N}$ avec $1 \leq d \leq x$ on ait uniformément*

$$\Psi\left(\frac{x}{d},y\right) = \left\{1+O\left(\frac{t}{u}\right)\right\}\left(1-\frac{t^2}{u^2}\right)^{bu}\frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha}$$

où on a posé $t=(\log d)/\log y$.

Remarquons que cela implique sous les mêmes hypothèses la majoration

$$\Psi(x/d,y) \ll \Psi(x,y)/d^\alpha.$$

On dispose avec ceci de tous les outils nécessaires pour préciser le résultat de Lagarias et Soundararajan.

1.3 Solutions générales pondérées

Dans ce qui suit, $\Phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0,\infty[$. L'objet d'étude dans cette partie est la quantité suivante.

$$N(A,B,C,y;\Phi) := \sum_{\substack{P^+(abc)\leq y\\ a+b=c}} \Phi\left(\frac{a}{A}\right)\Phi\left(\frac{b}{B}\right)\Phi\left(\frac{c}{C}\right).$$

On a donc en particulier $N(x,y;\Phi) = N(x,x,x,y;\Phi)$.

1.3.1 Rappel des lemmes de Lagarias et Soundararajan [LS12]

Dans un premier temps, on rappelle les principales étapes du raisonnement de Lagarias et Soundararajan. Leur méthode se base sur la méthode du cercle. On note $\mathrm{e}(x) = \exp(2i\pi x)$ et on pose

$$E_\Phi(x,y;\vartheta) := \sum_{P^+(n)\leq y} \mathrm{e}(n\vartheta)\Phi\left(\frac{n}{x}\right).$$

On peut alors écrire

$$N(A,B,C,y;\Phi) = \int_0^1 E_\Phi(A,y;\vartheta)E_\Phi(B,y;\vartheta)E_\Phi(C,y;-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta. \tag{1.10}$$

Le but est de trouver des estimations de $E_\Phi(x,y;\vartheta)$ qui se comportent bien lorsqu'on les reporte dans l'intégrale.

Le comportement de $E_\Phi(x,y;\vartheta)$ est fortement lié aux approximations rationnelles de ϑ : ainsi, si $\vartheta = a/q+\beta$ on peut écrire (*cf.* la démonstration de la proposition 6.1 de [LS12])

$$E_\Phi(x,y;\vartheta) = \sum_{\substack{d\mid q \\ P^+(d)\leq y}} \frac{1}{\varphi(q/d)} \sum_{\chi \pmod{q/d}} \chi(a)\tau(\overline{\chi}) \left(\sum_{P^+(m)\leq y} \mathrm{e}(md\beta)\chi(m)\Phi\left(\frac{md}{x}\right)\right) \tag{1.11}$$

où $\tau(\overline{\chi})$ est la somme de Gauss $\sum_{b \pmod{q/d}} \overline{\chi}(b)\mathrm{e}(\frac{b}{q/d})$. La proposition 6.1 de [LS12] montre que la contribution des caractères non principaux à $E_\Phi(x,y;\vartheta)$ est négligeable. La version qu'on énonce ici se place sous des hypothèses plus générales, mais se montre de manière identique : c'est pourquoi nous n'en donnons pas la preuve.

Proposition 1.1 ([LS12], proposition 6.1)**.** *Soit $\varepsilon>0$ et Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0,\infty[$. Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors lorsque les réels x, y, R et ϑ vérifient $2\leq y\leq x\leq R$ et $\vartheta\in[0,1]$ avec $\vartheta = a/q+\beta$ où $(a,q)=1$, $q\leq R^{1/2}$ et $|\beta|\leq 1/(qR^{1/2})$, on a*

$$E_\Phi(x,y;\vartheta) = M_\Phi(x,y;q,\beta) + O_{\varepsilon,\Phi}(xR^{-1/4+\varepsilon})$$

où $M_\Phi(x,y;q,\beta)$ est défini par

$$M_\Phi(x,y;q,\beta) := \sum_{P^+(n)\leq y} \frac{\mu(q/(q,n))}{\varphi(q/(q,n))}\mathrm{e}(n\beta)\Phi\left(\frac{n}{x}\right).$$

Cette proposition ne donne pas une bonne majoration pour des y trop petits : par exemple lorsque $y<(\log x)^{4-\varepsilon}$, la majoration triviale

$$E_\Phi(x,y;\vartheta) \ll_\Phi \Psi(x,y) = x^{\alpha+o(1)} \ll x^{3/4-\varepsilon/2}$$

est plus forte.

Le point important dans la démonstration de cette proposition est d'avoir une majoration efficace de la somme d'exponentielles

$$\Psi_0(z,y;\chi,\gamma) := \sum_{P^+(n)\leq y} \mathrm{e}(n\gamma)\chi(n)\Phi\left(\frac{n}{z}\right)$$

lorsque χ est un caractère de Dirichlet et $\gamma\in\mathbf{R}$. On a pour tout $\sigma>0$,

$$\Psi_0(z,y;\chi,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} L(s,\chi;y)z^s\check{\Phi}_0(\gamma z,s)\mathrm{d}s$$

où l'on a noté

$$L(s,\chi;y) := \sum_{P^+(n)\leq y} \chi(n)n^{-s} = \prod_{p\leq y}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

$$\check{\Phi}_0(\lambda,s) := \int_0^\infty \Phi(t)\mathrm{e}(\lambda t)t^{s-1}\mathrm{d}t.$$

Afin de majorer Ψ_0, il nous suffit d'avoir de bonnes majorations de $L(s,\chi;y)$ et $\check{\Phi}_0(\lambda,s)$ puis de les reporter dans l'intégrale. Les majorations dont on dispose sont les suivantes.

Proposition 1.2 ([LS12], proposition 5.1)**.** *Soit $\varepsilon > 0$. Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors pour tout caractère χ modulo q et tout $s \in \mathbf{C}$ avec $s = \sigma + i\tau$ et $1/2 + \varepsilon \le \sigma \le 3/2$, là où l'une quelconque des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- *χ est non principal,*
- *χ est principal et $\tau > y^{1-\sigma}$,*

on a

$$L(s,\chi;y) \ll_\varepsilon (q|\tau|)^\varepsilon.$$

Proposition 1.3 ([LS12], lemmes 3.3 et 3.5)**.** *Soit $k \ge 0$ et Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0,\infty[$. Pour tous $\lambda \in \mathbf{R}$ et $s \in \mathbf{C}$ que l'on écrit $\sigma + i\tau$ avec $\sigma \ge 1/4$ on a*

$$|\check{\Phi}_0(\lambda,s)| \ll_{k,\Phi} \min\left(\left(\frac{1+|\lambda|}{|s|}\right)^k, \left(\frac{1+|s|}{|\lambda|}\right)^k\right).$$

De plus, soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \ge 0$. Lorsque $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\check{\Phi}_0(\lambda,s)|(1+|\tau|)^\delta \mathrm{d}\tau \ll_{\Phi,\sigma,\varepsilon} (1+|\lambda|)^{1/2+\delta+\varepsilon}.$$

Il reste alors à traiter le terme principal $M_\Phi(x,y;q,\beta)$. On se ramene au cas $P^+(q) \le y$ en écrivant $q = q_0 q_1$ avec $P^+(q_0) \le y$ et $P^-(q_1) > y$. Il vient

$$M_\Phi(x,y;q,\beta) = \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)} M_\Phi(x,y;q_0,\beta).$$

Définissons

$$\widetilde{M}_\Phi(x,y;q_0,\beta) := \alpha q_0^{-\alpha} \prod_{p|q_0}\left(1 - \frac{p^\alpha - 1}{p-1}\right)\check{\Phi}_0(\beta x,\alpha)\Psi(x,y).$$

L'estimation de $M_\Phi(x,y;q_0,\beta)$ est l'objet de la proposition suivante de Lagarias et Soundararajan. De même que la Proposition 1.1, nous l'énonçons sous des hypothèses plus générales, mais la démonstration reste identique.

Proposition 1.4 ([LS12], proposition 6.3)**.** *Soient $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ et Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0,\infty[$. Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors lorsque les réels x, y, R, q_0 et β vérifient*

$$2 \le (\log x)^{2+\varepsilon} \le y \le x \le R,\ q_0 \in S(R^{1/2},y)\ \text{ et } \beta \in [-1/(q_0 R^{1/2}), 1/(q_0 R^{1/2})]$$

on a

- *si $x = R$ et $|\beta| \ge R^{\delta-1}$ alors*

$$|M_\Phi(x,y;q_0,\beta)| \ll_{\varepsilon,\delta,\Phi} x^{3/4+\varepsilon} q_0^{-1},$$

- *si $|\beta| \le R^{\delta-1}$ et si de plus $y \le \exp((\log x)^{1/2-\varepsilon})$,*

$$M_\Phi(x,y;q_0,\beta) = \widetilde{M}_\Phi(x,y;q_0,\beta) + O_{\varepsilon,\delta,\Phi}(x^{1/2+\varepsilon} q_0^{-1} R^{1/4+\varepsilon}) + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{q_0^{-\alpha+\varepsilon}\Psi(x,y)}{(1+|\beta|x)^2(\log y)}\right).$$

Le reste du raisonnement consiste alors à reporter ces estimations dans l'intégrale (1.10).

On s'intéresse au deuxième cas de la Proposition 1.4, car c'est lui qui dicte le terme d'erreur et la limite supérieure en y : $(\log y)H(u)^{-c_0} \le 1$ du domaine de validité du Théorème 1.3.

1.3.2 Estimation de M

On démontre ici la proposition suivante, qui est une version plus précise de la proposition 6.3 de [LS12].

Proposition 1.5. *Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, pour tout $\delta > 0$ et toute fonction Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0,\infty[$, lorsque les réels x, y, R, q_0 et β vérifient*

$$(x,y) \in \mathcal{D}^*(1,c_0),\ x \le R,\ q_0 \in S(R^{1/2},y)\ \text{et}\ \beta \in [-R^{\delta-1}, R^{\delta-1}]$$

on ait

$$M_\Phi(x,y;q_0,\beta) = \widetilde{M}_\Phi(x,y;q_0,\beta) + O_{\delta,\Phi}\left(x q_0^{-1/2} R^{-1/2+\delta}\right) + O_{\delta,\Phi}\left(\frac{q_0^{-\alpha+\delta}\Psi(x,y)}{(1+|\beta|x)u}\right). \quad (1.12)$$

Démonstration. Soit c_0 un réel vérifiant $0 < c_0 < \min(c_1/2, c_2/8)$, où c_1 et c_2 sont les constantes des lemmes 1.1 et 1.4. On choisit x, y, R, q_0 et β comme dans l'énoncé. On part de l'identité suivante valable pour tout $\sigma > 0$, obtenue en appliquant une transformation de Mellin,

$$M_\Phi(x,y;q_0,\beta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s;y,q_0) x^s \check{\Phi}_0(\beta x, s)\mathrm{d}s \quad (1.13)$$

avec la notation

$$\zeta(s;y,q_0) = \sum_{P^+(n)\le y} \frac{\mu(q_0/(q_0,n))}{\varphi(q_0/(q_0,n))} n^{-s}.$$

On remarque que l'on a

$$\zeta(s;y,q_0) = s q_0^{-s} \prod_{p|q_0}\left(1 - \frac{p^s-1}{p-1}\right)\zeta(s;y).$$

On suit la méthode du col afin d'estimer l'intégrale qui apparaît dans (1.13). Posons $s = \sigma + i\tau$. L'abscisse d'intégration est déplacée en $\sigma = \alpha$ pour les τ petits. Pour les plus grandes valeurs de τ, on se déplace progressivement vers la droite $\sigma = 1/2$ où le facteur x^s a moins d'importance, en tirant avantage de l'hypothèse de Riemann.

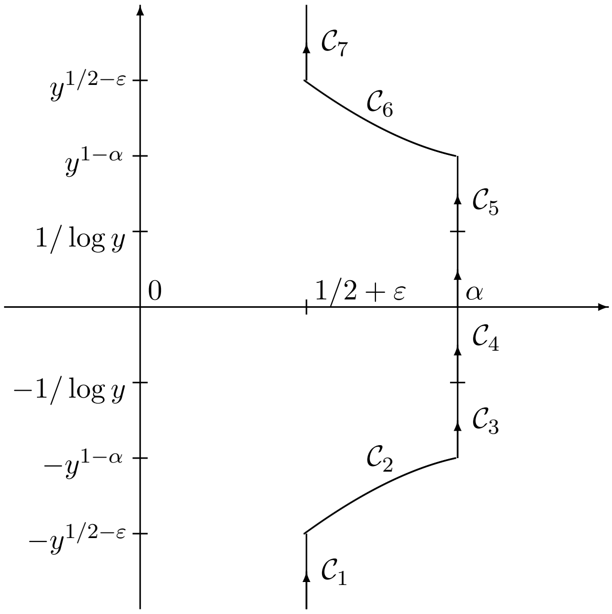
Soit $\varepsilon > 0$. On intègre sur le contour $\cup_{i=1}^7 \mathcal{C}_j$ où

- $\mathcal{C}_1$ est la demi-droite $]1/2+\varepsilon - i\infty, 1/2+\varepsilon - iy^{1/2-\varepsilon}]$,
- $\mathcal{C}_2$ est le chemin $\left\{1 - (\log(-\tau))/\log y + i\tau, \tau \in [-y^{1/2-\varepsilon}, -y^{1-\alpha}]\right\}$,
- $\mathcal{C}_3$ est le segment $[\alpha - iy^{1-\alpha}, \alpha - i/\log y]$,
- $\mathcal{C}_4$ est le segment $[\alpha - i/\log y, \alpha + i/\log y]$,
- $\mathcal{C}_5$ est le segment $[\alpha + i/\log y, \alpha + iy^{1-\alpha}]$,
- $\mathcal{C}_6$ est le chemin $\left\{1 - (\log \tau)/\log y + i\tau, \tau \in [y^{1-\alpha}, y^{1/2-\varepsilon}]\right\}$,
- $\mathcal{C}_7$ est la demi-droite $]1/2+\varepsilon - i\infty, 1/2+\varepsilon - iy^{1/2-\varepsilon}]$,

chacun de ces chemins étant parcouru par parties imaginaires croissantes. Les chemins $\mathcal{C}_j$ et $\mathcal{C}_{8-j}$ $(1 \le j \le 3)$ étant conjugués, on se contentera de traiter les chemin $\mathcal{C}_4$ à $\mathcal{C}_7$. On note également

$$I_j := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_j} \zeta(s;y,q_0) x^s \check{\Phi}_0(\beta x, s)\mathrm{d}s$$

en remarquant que $I_j = \overline{I_{8-j}}$ $(1 \le j \le 3)$.



Sur le segment $\mathcal{C}_7$, les Lemmes 1.2 et 1.3 fournissent,

$$\zeta(s;y) \ll_\varepsilon q_0^{-1/2+\varepsilon}\tau^\varepsilon \text{ et } x^s \ll x^{1/2+\varepsilon}.$$

De plus,

$$\int_{|\tau|>y^{1/2-\varepsilon}} |\check{\Phi}_0(\beta x, 1/2+\varepsilon+\tau)|\tau^\varepsilon \ll_{\varepsilon,\Phi} (1+|\beta|x)^{1/2+2\varepsilon}.$$

Donc quitte à prendre $\varepsilon < \delta/(2+4\delta)$,

$$I_1 \ll_{\delta,\Phi} xq_0^{-1/2}R^{-1/2+\delta}.$$

Sur le segment $\mathcal{C}_6$, on intègre suivant σ. On a

$$I_6 = \frac{1}{2i\pi}\int_{1/2+\varepsilon}^{\alpha} \zeta(\sigma+iy^{1-\sigma};y,q_0)x^{\sigma+iy^{1-\sigma}}\check{\Phi}_0(\beta x, \sigma+iy^{1-\sigma})(i(\log y)y^{1-\sigma}-1)\mathrm{d}\sigma.$$

On a les majorations

$$\zeta(s;y,q_0) \ll_\delta q_0^{-\sigma+\delta/2}|\zeta(s;y)| \ll_\delta q_0^{-\sigma+\delta}y^{\delta(1-\sigma)}$$
$$\check{\Phi}_0(\beta x, s) \ll_\Phi \frac{y^{1-\sigma}}{1+|\beta|x}$$
$$i(\log y)y^{1-\sigma}-1 \ll (\log y)y^{1-\sigma}.$$

En reportant dans l'intégrale, on obtient pour une certaine constante $c_3 > 0$,

$$\begin{aligned}
I_6 &\ll_{\delta,\Phi} \frac{q_0^\delta \log y}{1+|\beta|x}\int_{1/2+\varepsilon}^{\alpha} q_0^{-\sigma}x^\sigma y^{(2+\delta)(1-\sigma)}\mathrm{d}\sigma \\
&\ll \frac{x^\alpha}{\log x}\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}(\log y)y^{(2+\delta)(1-\alpha)} \\
&\ll \frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\sqrt{u}\log y}\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\frac{\log y}{\sqrt{u}}(u\log u)^{2+\delta}\exp(-c_3u) \\
&\ll \frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\sqrt{u}\log y}\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\exp\left(-\frac{c_3}{2}u\right).
\end{aligned}$$

La contribution du chemin $\mathcal{C}_6$ est donc largement un terme d'erreur acceptable.

La contribution du segment $\mathcal{C}_5$ s'écrit

$$I_5 = \frac{1}{2i\pi}\int_{1/\log y}^{y^{1-\alpha}} \zeta(\alpha+i\tau; y, q_0)x^{\alpha+i\tau}\check{\Phi}_0(\beta x, \alpha+i\tau)\mathrm{d}\tau.$$

On utilise le Lemme 1.4. On dispose pour $\tau \in [1/\log y, y^{1-\alpha}]$ de la majoration

$$\begin{aligned}|\zeta(s;y)| &\leq \zeta(\alpha;y)\exp\left(-c_2u\frac{\tau^2}{(1-\alpha)^2+\tau^2}\right)\\ &\leq \zeta(\alpha;y)\exp\left(-c_2u\frac{1}{((1-\alpha)\log y)^2+1}\right)\\ &\leq \zeta(\alpha;y)H(u)^{-c_2/2}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}I_5 &\ll_\delta x^\alpha\zeta(\alpha;y)H(u)^{-c_2/2}q_0^{-\alpha+\delta}\int_{1/(\log y)}^{y^{1-\alpha}}|\check{\Phi}_0(\beta x, \alpha+i\tau)|\mathrm{d}\tau\\ &\ll_{\delta,\Phi} x^\alpha\zeta(\alpha;y)H(u)^{-c_2/2}q_0^{-\alpha+\delta}\frac{y^{2(1-\alpha)}}{1+|\beta|x}.\end{aligned}$$

L'intégrale sur $\check{\Phi}_0$ est évaluée grâce au Lemme 1.3, en distinguant suivant $|\beta|x \leq y^{1-\alpha}$ ou $|\beta|x > y^{1-\alpha}$. Finalement, en utilisant $y^{1-\alpha} \sim u\log u$ et d'après l'hypothèse $c_0 < c_2/8$, on obtient

$$\begin{aligned}I_3 &\ll_{\delta,\Phi} \frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\sqrt{u}\log y}\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\exp\left(-c_2/2\frac{u}{(\log u)^2}+1/2\log u+2\log(u\log u)+\log\log y\right)\\ &\ll \frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\sqrt{u}\log y}\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}H(u)^{-c_2/8}.\end{aligned}$$

Ainsi I_5 est de l'ordre du terme d'erreur annoncé.

Sur le segment $\mathcal{C}_4$, la quantité à estimer est

$$I_4 := \frac{1}{2\pi}\int_{-1/\log y}^{1/\log y} \zeta(\alpha+i\tau; y, q_0)x^{\alpha+i\tau}\check{\Phi}_0(\beta x, \alpha+i\tau)\mathrm{d}\tau.$$

On sépare l'intégrale en deux, selon la position de $|\tau|$ par rapport à $T_0 = 1/(u^{1/3}\log y)$. D'après le Lemme 1.5, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{T_0\leq|\tau|\leq 1/\log y}\zeta(s;y,q_0)x^s\check{\Phi}(\beta x, s)\mathrm{d}s &\ll_{\delta,\Phi} \frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\int_{T_0\leq|\tau|\leq 1/\log y}|\zeta(s;y)x^s|\mathrm{d}s\\ &\ll \Psi(x,y)\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{(1+|\beta|x)u}.\end{aligned}$$

Pour l'autre partie de l'intégrale, le Lemme 1.6 fournit le développement de Taylor suivant, valable pour $|\tau| \leq T_0$,

$$\zeta(s;y)\frac{x^s}{s} = \frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\alpha}e^{-\tau^2\sigma_2/2}\left(1-i\frac{\tau}{\alpha}-i\frac{\tau^3}{3!}\sigma_3+O(\tau^6\sigma_3^2+\tau^2+\tau^4\sigma_4)\right).$$

Pour traiter le facteur restant dans l'intégrale, on note

$$f(\tau) := sq_0^{-s}\prod_{p|q_0}\Big(1-\frac{p^s-1}{p-1}\Big)\check{\Phi}_0(\beta x,s).$$

En remarquant que pour tout $k\in\mathbf{N}$, l'application $t\mapsto(\log t)^k\Phi(t)$ est également $\mathcal{C}^\infty$ de même support que Φ, on déduit

$$\check{\Phi}_0(\beta x,\alpha)\ll_\Phi\frac{1}{1+|\beta|x}$$

$$\frac{\partial\check{\Phi}_0}{\partial s}(\beta x,\alpha)\ll_\Phi\frac{1}{1+|\beta|x}$$

$$\sup_{|\tau|\leq T_0}\left|\frac{\partial^2\check{\Phi}_0}{\partial s^2}(\beta x,s)\right|\ll_\Phi\frac{1}{1+|\beta|x}$$

ce qui entraîne

$$|f(0)|+|f'(0)|+\sup_{|\tau|\leq T_0}|f''(\tau)|\ll_{\delta,\Phi}q_0^{-\alpha+\delta}/(1+|\beta|x).$$

On a donc pour $|\tau|\leq T_0$,

$$f(\tau)=f(0)+f'(0)\tau+O_{\delta,\Phi}\left(\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\tau^2\right).$$

Ainsi lorsque l'on multiplie ce développement limité avec celui de $\zeta(s;y)x^s/s$, on obtient

$$\begin{aligned}\zeta(s;y,q_0)x^s\check{\Phi}_0(\beta x,s)=&\frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\alpha}e^{-\tau^2\sigma_2/2}\\&\times\left(f(0)+\lambda\tau+\mu\tau^3+O_{\delta,\Phi}\left((\tau^2+\sigma_3^2\tau^6+\sigma_4\tau^4)\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\right)\right)\end{aligned}$$

où les coefficients λ et μ dépendent au plus de x, y, q_0 et δ. En intégrant cette expression pour $|\tau|\leq T_0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{|\tau|\leq T_0}\zeta(s;y,q_0)x^s\check{\Phi}(\beta x,s)\mathrm{d}s=&\frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{2\pi\alpha}f(0)\int_{|\tau|\leq T_0}e^{-\tau^2\sigma_2/2}\mathrm{d}\tau\\&+\frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{2\pi\alpha}\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\int_{|\tau|\leq T_0}e^{-\tau^2\sigma_2/2}O_{\delta,\Phi}\left(\tau^2+\sigma_3^2\tau^6+\sigma_4\tau^4\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite vaut

$$f(0)\frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left(1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

Quant au deuxième, la majoration $\int_{\mathbf{R}}|\tau|^k\exp(-\tau^2\sigma_2/2)\mathrm{d}\tau\ll_k\sigma_2^{-(k+1)/2}$ permet d'écrire qu'il est

$$\ll_{\delta,\Phi}\frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)}{\sqrt{\sigma_2}\alpha}\left(\sigma_2^{-1}+\sigma_3^2\sigma_2^{-3}+\sigma_4\sigma_2^{-2}\right)\frac{q_0^{-\alpha+\delta}}{1+|\beta|x}\ll\frac{x^\alpha\zeta(\alpha;y)q_0^{-\alpha+\delta}}{\alpha u\sqrt{\sigma_2}(1+|\beta|x)}$$

en utilisant l'approximation $\sigma_k \asymp u(\log y)^k$ $(2 \leq k \leq 4)$ énoncée au Lemme 1.6.

On obtient donc

$$I_4 = \alpha q_0^{-\alpha} \prod_{p|q_0} \left(1 - \frac{p^\alpha - 1}{p-1}\right) \check{\Phi}_0(\beta x, \alpha) \frac{x^\alpha \zeta(\alpha; y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}} + O_{\delta,\Phi}\left(\frac{q_0^{-\alpha+\delta} x^\alpha \zeta(\alpha; y)}{u^{3/2}(\log y)(1 + |\beta|x)}\right).$$

On utilise maintenant les Lemmes 1.1 et 1.2, en vérifiant que les termes d'erreurs sont acceptables. Quitte à se restreindre à $\varepsilon < 3/2$ et d'après l'hypothèse $c_0 < c_1/2$, où c_1 est la constante du Lemme 1.1, on a

$$\exp((\log y)^{3/2-\varepsilon}) \gg u\sqrt{u} \log y$$

$$H(u)^{c_1} \gg u\sqrt{u} H(u)^{c_1/2} \gg u\sqrt{u} \log y.$$

Il vient

$$I_4 = \alpha q_0^{-\alpha} \prod_{p|q_0} \left(1 - \frac{p^\alpha - 1}{p-1}\right) \check{\Phi}_0(\beta x, \alpha) \Psi(x, y) + O_{\delta,\Phi}\left(\frac{\Psi(x, y) q_0^{-\alpha+\delta}}{(1 + |\beta|x)u}\right).$$

En combinant les estimations obtenues pour I_j $(1 \leq j \leq 7)$, on obtient la formule voulue.

□

1.3.3 Estimation de $N(A, B, C, y; \Phi)$

On applique à présent la méthode du cercle comme dans [LS12] en utilisant l'estimation de la proposition 1.5. Pour toutes les valeurs de A, B, C telles que $2/3 < \alpha_A, \alpha_B, \alpha_C < 1$, on définit les quantités suivantes

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0 &= \mathfrak{S}_0(\Phi; A, B, C, y) \\ &:= \alpha_A \alpha_B \alpha_C \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(t_1)\Phi(t_2)\Phi(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) t_1^{\alpha_A - 1} t_2^{\alpha_B - 1} \left(\frac{A}{C} t_1 + \frac{B}{C} t_2\right)^{\alpha_C - 1} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(A, B, C, y) := \prod_p \left(1 + \frac{(p-1)(p - p^{\alpha_A})(p - p^{\alpha_B})(p - p^{\alpha_C})}{p(p^{\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C - 1} - 1)(p-1)^3}\right).$$

Théorème 1.6. *Il existe une constante absolue $c_0 > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans $]0, \infty[$, il existe un réel $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ qui tend vers 0 avec ε tel que pour tous (A, y), (B, y) et (C, y) dans le domaine $\mathcal{D}^*(4+\eta, c_0)$ avec $C^\varepsilon \leq A \leq B \leq C$ on ait*

$$\begin{aligned}N(A, B, C, y; \Phi) &= \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \frac{\Psi(A, y)\Psi(B, y)\Psi(C, y)}{C} \\ &\quad + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(A, y)\Psi(B, y)\Psi(C, y)}{u_A C} + C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A, y)\Psi(C, y)}\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

Avant de prouver ce théorème, on montre qu'il implique l'estimation (1.4).

Démonstration de la première assertion du Théorème 1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Le Théorème 1.6 dans le cas $A = B = C$ assure l'existence d'une constante absolue $c_0 > 0$ et d'un réel $\eta = \eta(\varepsilon)$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}^*(4 + \eta, c_0)$, on ait

$$N(x, y; \Phi) = \mathfrak{S}_0(\Phi; \alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x, y)^3}{x} + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x, y)^3}{ux} + x^{3/4+\varepsilon}\Psi(x, y)\right).$$

On choisit $\varepsilon \leq 1/48$ et tel que $4+\eta(\varepsilon) \leq 8$. On vérifie alors que pour $(x, y) \in \mathcal{D}(8+384\varepsilon, c_0)$, on a

$$x^{3/4+\varepsilon}\Psi(x, y) \ll_\varepsilon \frac{\Psi(x, y)^3}{x^{1+\varepsilon}} \tag{1.16}$$

ce qui implique l'estimation (1.4) en vertu de $u \ll_\varepsilon x^\varepsilon$. □

Démonstration du Théorème 1.6. Ce qui suit reprend en grande partie la démonstration du théorème 2.1 de [LS12]. Soit c_0 la constante absolue donnée par la Proposition 1.5. On se place dans les hypothèses de l'énoncé. On suppose que $C \ll_\Phi B$: dans le cas contraire, le membre de gauche et le terme principal du membre de droite de (1.15) sont tous les deux nuls. On désigne par x une quantité générique telle que $(x, y) \in \mathcal{D}^*(4, c_0)$, c'est-à-dire qui puisse jouer le rôle de A, B et C. Enfin, on note que l'hypothèse $C^\varepsilon \leq A \leq B \leq C$ implique $\alpha_A = \alpha_B + o_\varepsilon(1) = \alpha_C + o_\varepsilon(1)$ lorsque A, B et C tendent vers l'infini.

On définit les arcs majeurs comme dans [LS12]. Soit $\delta > 0$. Pour tout $q \leq C^{1/4}$ et a premier avec q avec $0 \leq a < q$, on définit $\mathfrak{M}(a, q)$ pour $q > 1$ comme l'ensemble des $\vartheta \in [0, 1]$ tels que $|\vartheta - a/q| \leq C^{\delta-1}$, et pour $q = 1$ comme l'ensemble $[0, C^{\delta-1}] \cup [1-C^{\delta-1}, 1]$. Un réel de l'intervalle $[0, 1]$ appartient à au plus un tel ensemble. On note $\mathfrak{M}$ la réunion de tous les $\mathfrak{M}(a, q)$ pour $q \geq 1$ et $0 \leq a < q$, $(a, q) = 1$, et $\mathfrak{m} = [0, 1] \smallsetminus \mathfrak{M}$.

Ainsi qu'il est montré dans la preuve du théorème 2.1 de [LS12], on a $E_\Phi(C, y; \vartheta) \ll_{\varepsilon,\Phi} C^{3/4+\varepsilon}$ pour tout $\vartheta \in \mathfrak{m}$. On a donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{m}} E_\Phi(A, y; \vartheta)&E_\Phi(B, y; \vartheta)E_\Phi(C, y; -\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\ &\ll_{\varepsilon,\Phi} C^{3/4+\varepsilon}\int_0^1 |E_\Phi(A, y; \vartheta)||E_\Phi(B, y; -\vartheta)|\mathrm{d}\vartheta \\ &\ll C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A, y)\Psi(B, y)}.\end{aligned}$$

On examine maintenant les arcs majeurs. En utilisant trois fois la Proposition 1.1, on obtient pour $\vartheta \in \mathfrak{M}(a, q)$ avec $q \leq C^{1/4}$ et $\vartheta = a/q + \beta$,

$$\begin{aligned}E_\Phi(A, y; \vartheta)E_\Phi(B, y; \vartheta)E_\Phi(C, y; -\vartheta) &= M_\Phi(A, y; q, \beta)M_\Phi(B, y; q, \beta)M_\Phi(C, y; q, -\beta) \\ + O_{\varepsilon,\Phi}\Big(B^{3/4+\varepsilon/2}|E_\Phi(A, y; \vartheta)||E_\Phi(C, y; \vartheta)| &+ A^{3/4+\varepsilon/2}|M_\Phi(B, y; q, \beta)||E_\Phi(C, y; \vartheta)| + \\ C^{3/4+\varepsilon/2}&|M_\Phi(B, y; q, \beta)||M_\Phi(A, y; q, \beta)|\Big).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Avant d'intégrer ceci pour $|\beta| \leq C^{\delta-1}$ et sommer pour $q \leq C^{1/4}$, on montre la majoration suivante

$$I = I(x, y; C, q_0) := \int_{-C^{\delta-1}}^{C^{\delta-1}} |M_\Phi(x, y; q_0, \beta)|^2\mathrm{d}\beta \ll_{\varepsilon,\Phi} q_0^{-1-\alpha+\varepsilon/3}(\log x)\Psi(x, y) \tag{1.18}$$

où $P^+(q_0) \le y$. Par définition de $M_\Phi(x,y;q_0,\beta)$ on a

$$I = 2 \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)^2} \Phi\left(\frac{n}{x}\right)^2 C^{\delta-1}$$
$$+ 2\,\mathfrak{Re}\left(\sum_{P^+(n)\le y} \sum_{\substack{m\ge n+1\\ P^+(m)\le y}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,m)}\right)} \Phi\left(\frac{n}{x}\right) \Phi\left(\frac{m}{x}\right) h(m-n) \right)$$

où $h(r) = (\mathrm{e}(rC^{\delta-1}) - \mathrm{e}(-rC^{\delta-1}))/r$. On a pour tout $r \ge 1$, $h(r) \ll C^{\delta-1}/(1+rC^{\delta-1})$. On note I_1 et I_2 les deux sommes de cette estimation. On a

$$\begin{aligned} I_1 &\ll C^{\delta-1} \sum_{d\mid q_0} \frac{1}{\varphi(q_0/d)^2} \sum_{P^+(n')\le y} \Phi(n'd/x)^2 \\ &\ll_\Phi C^{\delta-1} \sum_{d\mid q_0} \frac{1}{d^\alpha \varphi(q_0/d)^2} \Psi(x,y) \ll C^{\delta-1} q_0^{-\alpha} \Psi(x,y). \end{aligned}$$

On note en effet que si le support de Φ est inclus dans $[0,K]$

$$\sum_{P^+(n')\le y} \Phi(n'd/x) \ll_\Phi \Psi(Kx/d,y) \ll_\Phi \Psi(x,y)/d^\alpha.$$

On écrit I_2 en divisant la somme en deux selon la taille de $m-n$ par rapport à $C^{1-\delta}$:

$$I_2 \ll C^{\delta-1} \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)} \Phi\left(\frac{n}{x}\right) \sum_{\substack{n+1\le m\le n+C^{1-\delta}\\ P^+(m)\le y}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,m)}\right)} \Phi\left(\frac{m}{x}\right)$$
$$+ \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)} \Phi\left(\frac{n}{x}\right) \sum_{\substack{m> n+C^{1-\delta}\\ P^+(m)\le y}} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,m)}\right)} \Phi\left(\frac{m}{x}\right) \frac{1}{m-n}.$$

On note $I_{2,1}$ et $I_{2,2}$ les sommes qui apparaissent au membre de droite. On a d'une part

$$\begin{aligned} I_{2,1} &\le \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)} \Phi\left(\frac{n}{x}\right) \sum_{d\mid q_0} \frac{1}{\varphi(q_0/d)} C^{\delta-1} \sum_{\frac{n+1}{d}\le m\le \frac{n+C^{1-\delta}}{d}} \Phi\left(\frac{m'd}{x}\right) \\ &\ll \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)} \Phi\left(\frac{n}{x}\right) \sum_{d\mid q_0} \frac{1}{d\varphi(q_0/d)} \\ &\ll_\varepsilon q_0^{-1+\varepsilon/4} \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)} \Phi\left(\frac{n}{x}\right) \\ &\le q_0^{-1+\varepsilon/4} \sum_{d\mid q_0} \frac{1}{\varphi(q_0/d)} \sum_{P^+(n')\le y} \Phi\left(\frac{n'd}{x}\right) \\ &\ll_\Phi q_0^{-1+\varepsilon/4} \Psi(x,y) \sum_{d\mid q_0} \frac{1}{d^\alpha \varphi(q_0/d)} \\ &\ll_\varepsilon q_0^{-1-\alpha+\varepsilon/3} \Psi(x,y) \end{aligned}$$

et d'autre part, si le support de Φ est inclus dans $[0,K]$,

$$\begin{aligned} I_{2,2} &\ll_\Phi \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)}\Phi\left(\frac{n}{x}\right) \sum_{n+C^{1-\delta}\le m\le Kx} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,m)}\right)}\frac{1}{m-n} \\ &\le \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)}\Phi\left(\frac{n}{x}\right)\sum_{d\mid q_0}\frac{1}{\varphi(q_0/d)} \sum_{\frac{n+C^{1-\delta}}{d}\le m'\le \frac{Kx}{d}} \frac{1}{m'd-n}. \end{aligned}$$

La somme en m' peut être majorée par

$$\int_{\frac{n+C^{1-\delta}}{d}-1}^{\frac{Kx}{d}} \frac{\mathrm{d}t}{dt-n} = \frac{1}{d}\int_{C^{1-\delta}-d}^{Kx-n}\frac{\mathrm{d}t}{t} \ll_\Phi \frac{1}{d}\log x$$

en vertu de $d\le q_0\le C^{1/4}=o(C^{1-\delta})$ pour δ assez petit. Il vient

$$\begin{aligned} I_{2,2} &\ll_\Phi \log x \sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)}\Phi\left(\frac{n}{x}\right)\sum_{d\mid q_0}\frac{1}{d\varphi(q_0/d)} \\ &\ll_\varepsilon q_0^{-1+\varepsilon/4}(\log x)\sum_{P^+(n)\le y} \frac{1}{\varphi\left(\frac{q_0}{(q_0,n)}\right)}\Phi\left(\frac{n}{x}\right) \\ &\ll_\Phi q_0^{-1+\varepsilon/4}(\log x)\Psi(x,y)\sum_{d\mid q_0}\frac{1}{d^\alpha\varphi(q_0/d)} \\ &\ll_\varepsilon q_0^{-1-\alpha+\varepsilon/3}(\log x)\Psi(x,y). \end{aligned}$$

On a donc, en tenant compte de $q_0\le C^{1/4}$,

$$I \ll_{\varepsilon,\Phi} q_0^{-1-\alpha+\varepsilon/3}(\log x)\Psi(x,y).$$

À propos du terme en q_0, on note qu'en sommant sur $q\le C^{1/4}$ on a

$$\sum_{q\le C^{1/4}}\frac{\varphi(q_0)}{\varphi(q_1)}q_0^{-1-\alpha+\varepsilon/3} \le \Bigg(\sum_{q_0\in S(C^{1/4},\ y)}\varphi(q_0)q_0^{-1-\alpha+\varepsilon/3}\Bigg)\Big(\sum_{q_1\le C^{1/4}}\varphi(q_1)^{-1}\Big) \ll_\varepsilon C^{\varepsilon/3} \tag{1.19}$$

où on écrit de manière unique $q=q_0q_1$ avec $P^+(q_0)\le y$ et $P^-(q_1)>y$. La somme sur q_0 est traitée par une sommation d'Abel, grâce à l'estimation (1.9).

On intègre maintenant les termes d'erreur de (1.17) sur les arcs majeurs. On a un premier terme

$$\ll_{\varepsilon,\Phi} B^{3/4+\varepsilon/2}\int_{\mathfrak{M}}|E_\Phi(A,y;\vartheta)||E_\Phi(C,y;\vartheta)|\mathrm{d}\vartheta \le B^{3/4+\varepsilon/3}\sqrt{\Psi(A,y)\Psi(C,y)}.$$

En utilisant $|M_\Phi(B,y;q,\beta)||E_\Phi(C,y;\vartheta)| \ll |M_\Phi(B,y;q,\beta)|^2+|E_\Phi(C,y;\vartheta)|^2$, on voit que le deuxième terme d'erreur de (1.17) donne après intégration un terme

$$\ll_{\varepsilon,\Phi} A^{3/4+\varepsilon/2}\Big\{\Psi(C,y)+\sum_{q\le C^{1/4}}\varphi(q)\int_{-C^{1-\delta}}^{C^{1-\delta}}|M_\Phi(B,y;q,\beta)|^2\Big\}.$$

Les majorations (1.18) et (1.19) montrent que ceci est

$$\ll_{\varepsilon,\Phi} A^{3/4+\varepsilon/2}\left\{\Psi(C,y)+(\log B)\Psi(B,y)C^{\varepsilon/3}\right\}.$$

Le dernier terme d'erreur de (1.17) devient après sommation et intégration un terme d'erreur

$$\ll_{\varepsilon,\Phi} C^{3/4+\varepsilon/2} \sum_{q\leq C^{1/4}} \frac{\varphi(q_0)}{\varphi(q_1)} \int_{-C^{\delta-1}}^{C^{\delta-1}} |M_\Phi(A,y;q_0,\beta)||M_\Phi(B,y;q_0,\beta)|\mathrm{d}\beta$$

et une inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que les calculs faits précédemment montrent que celui-ci est

$$\ll_{\varepsilon,\Phi} C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A,y)\Psi(B,y)}.$$

Les hypothèses $A \leq C$ et $B \asymp_\Phi C$ que l'on a faites montrent que chacun de ces trois termes d'erreur est

$$\ll_{\varepsilon,\Phi} C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A,y)\Psi(B,y)}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{M}} & E_\Phi(A,y;\vartheta)E_\Phi(B,y;\vartheta)E_\Phi(C,y;-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\ &= \sum_{q\leq C^{1/4}} \varphi(q) \int_{-C^{\delta-1}}^{C^{\delta-1}} M_\Phi(A,y;q,\beta)M_\Phi(B,y;q,\beta)M_\Phi(C,y;q,-\beta)\mathrm{d}\beta \\ &\quad + O_{\varepsilon,\Phi}\left(C^{3/4+2\varepsilon}\sqrt{\Psi(A,y)\Psi(B,y)}\right).\end{aligned} \tag{1.20}$$

On applique le Lemme 1.5 avec $R = C$, pour successivement $x = A$, $x = B$ et $x = C$. On reporte les estimations ainsi obtenues pour $M_\Phi(A,y;q,\beta)$, $M_\Phi(B,y;q,\beta)$ et $M_\Phi(C,y;q,\beta)$ dans (1.20). Une étude détaillée des termes d'erreur permet d'écrire, compte tenu de $B \asymp_\Phi C$ et $\alpha_A = \alpha_C + o(1)$,

$$\begin{aligned} M_\Phi(A,y;q,\beta)&M_\Phi(B,y;q,\beta)\ M_\Phi(C,y;q,-\beta) \\ &= \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)^3}\widetilde{M}_\Phi(A,\ y;q_0,\beta)\widetilde{M}_\Phi(B,y;q_0,\beta)\widetilde{M}_\Phi(C,y;q_0,\beta) \\ &\qquad + O_{\delta,\Phi}\left(\frac{1}{\varphi(q_1)^3}\frac{q_0^{-\alpha_A-\alpha_B-\alpha_C+3\delta}\Psi(A,y)\Psi(B,y)\Psi(C,y)}{u_A(1+|\beta|A)(1+|\beta|B)(1+|\beta|C)}\right) \\ &\qquad + O_{\delta,\Phi}\Big(\frac{1}{\varphi(q_1)^3}\Big\{q_0^{3/2}AC^{-1/2+4\delta} + \Psi(A,y)q_0^{-1-\alpha_C+\delta}C^{3\delta} \\ &\qquad\qquad + \Psi(A,y)\Psi(C,y)q_0^{-1/2-2\alpha_C+2\delta}C^{-1/2+2\delta}\Big\}\Big).\end{aligned} \tag{1.21}$$

On suppose $(C,y) \in \mathcal{D}(4+\eta, c_0)$ pour un certain $\eta > 0$ qui garantisse $\alpha_C - 3/4 \geq 3\delta$. On peut vérifier que le choix $\eta = 97\delta$ est valable dès que $\delta \leq 1/24$ pour x et y assez grands. On reporte l'estimation (1.21) dans l'estimation (1.20). On considère tout d'abord le deuxième terme d'erreur. Après intégration et sommation, on obtient un terme

$$\ll_{\delta,\Phi} AC^{-3/8+\delta} + \Psi(A,y)C^{1/4-\alpha_C/4+5\delta} + \Psi(A,y)\Psi(C,y)C^{-1/2+3\delta}.$$

On vérifie alors que ceci est $\ll_{\varepsilon,\Phi} C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A,y)\Psi(B,y)}$ quitte à prendre δ assez petit en fonction de ε.

On considère ensuite le premier terme d'erreur de (1.21). Après intégration et sommation, on obtient un terme

$$\begin{aligned}\ll_{\delta,\Phi} &\int_{-C^{\delta-1}}^{C^{\delta-1}} \frac{\mathrm{d}\beta}{(1+|\beta|A)(1+|\beta|B)(1+|\beta|C)} \frac{\Psi(A,y)\Psi(B,y)\Psi(C,y)}{u_A} \\ &\times \sum_{q_0\in S(C^{1/4},y)} \frac{\varphi(q_0)}{q_0^{\alpha_A+\alpha_B+\alpha_C-3\delta}} \sum_{\substack{q_1\leq C^{1/4}/q_0 \\ P^-(q_1)>y}} \frac{1}{\varphi(q_1)^2}.\end{aligned}$$

La somme en q_1 est trivialement bornée. Étant donnée notre hypothèse $\alpha_C - 3/4 \geq 3\delta$, la somme en q_0 est majorée par

$$\sum_{q_0\geq 1} \varphi(q_0) q_0^{-\alpha_A-\alpha_B-\alpha_C+3\delta} \ll 1.$$

Enfin, l'intégrale se majore comme suit :

$$\int_{-C^{\delta-1}}^{C^{\delta-1}} \frac{\mathrm{d}\beta}{(1+|\beta|A)(1+|\beta|B)(1+|\beta|C)} \ll \frac{1}{C}\int_0^{C^\delta} \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\frac{A}{C}\xi)(1+\frac{B}{C}\xi)(1+\xi)} \ll_\Phi \frac{1}{C}$$

la dernière majoration étant valable en vertu de $B/C \gg_\Phi 1$. Le premier terme d'erreur de (1.21) devient donc lorsqu'on le reporte dans (1.20) un terme

$$\ll_{\delta,\Phi} \frac{\Psi(A,y)\Psi(B,y)\Psi(C,y)}{u_A C}.$$

On reporte maintenant le terme principal de (1.21) dans l'estimation (1.20). Une inversion de Fourier fournit

$$\begin{aligned}\int_{-C^{\delta-1}}^{C^{\delta-1}} &\check{\Phi}_0(\beta A,\alpha_A)\check{\Phi}_0(\beta B,\alpha_B)\check{\Phi}_0(-\beta C,\alpha_C)\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{1}{C}\int_{-C^\delta}^{C^\delta} \check{\Phi}_0(\xi A/C,\alpha_A)\check{\Phi}_0(\xi B/C,\alpha_B)\check{\Phi}_0(-\xi,\alpha_C)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} \check{\Phi}_0(\xi A/C,\alpha_A)\check{\Phi}_0(\xi B/C,\alpha_B)\check{\Phi}_0(-\xi,\alpha_C)\mathrm{d}\xi + O_\Phi(C^{-1-\delta}) \\ &= \frac{1}{C}\mathfrak{S}_0(\Phi;A,B,C,y) + O_\Phi(C^{-1-\delta})\end{aligned}$$

Quant à la somme en q, on vérifie que l'hypothèse $\alpha_C - 3/4 \geq 3\delta$ implique

$$\frac{1}{y^{\alpha_A+\alpha_B+\alpha_C-2}\log y} \ll \frac{1}{u}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}&\sum_{q_0\in S(C^{1/4},y)} \sum_{\substack{q_1\leq C^{1/4}/q_0 \\ P^-(q_1)>y}} \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)^2} \frac{\alpha_A\alpha_B\alpha_C}{q_0^{\alpha_A+\alpha_B+\alpha_C}} \prod_{p\mid q_0}\left(1-\frac{p^{\alpha_A}-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{p^{\alpha_B}-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{p^{\alpha_C}-1}{p-1}\right) \\ = &\sum_{P^+(q_0)\leq y} \sum_{\substack{q_1\geq 1 \\ P^-(q_1)>y}} \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)^2} \frac{\alpha_A\alpha_B\alpha_C}{q_0^{\alpha_A+\alpha_B+\alpha_C}} \prod_{p\mid q_0}\left(1-\frac{p^{\alpha_A}-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{p^{\alpha_B}-1}{p-1}\right)\left(1-\frac{p^{\alpha_C}-1}{p-1}\right) \\ &+ O_\delta\left(C^{1/4(2+\delta-\alpha_A-\alpha_B-\alpha_C)}\right)\end{aligned}$$

où l'hypothèse $\alpha_C - 3/4 \geq 3\delta$ implique que l'exposant dans le terme d'erreur est $\leq -1/16$. La somme en q_1 vérifie

$$\sum_{\substack{q_1 \geq 1 \\ P^-(q_1) > y}} \frac{\mu(q_1)}{\varphi(q_1)^2} = 1 + O\left(\frac{1}{y \log y}\right)$$

et pour la somme en q_0 on a

$$\begin{aligned}
\sum_{P^+(q_0) \leq y} & q_0^{-\alpha_A - \alpha_B - \alpha_C} \prod_{p \mid q_0} \left(1 - \frac{p^{\alpha_A} - 1}{p-1}\right)\left(1 - \frac{p^{\alpha_B} - 1}{p-1}\right)\left(1 - \frac{p^{\alpha_C} - 1}{p-1}\right) \\
&= \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{p-1}{p(p^{\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C - 1} - 1)} \left(\frac{p - p^{\alpha_A}}{p-1}\right)\left(\frac{p - p^{\alpha_B}}{p-1}\right)\left(\frac{p - p^{\alpha_C}}{p-1}\right)\right) \\
&= \mathfrak{S}_1(A, B, C, y) + O\left(\frac{1}{y^{\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C - 2} \log y}\right)
\end{aligned}$$

On utilise $\mathfrak{S}_0(\Phi; A, B, C, y) \ll 1$ et $\mathfrak{S}_1(A, B, C, y) \ll 1$ et on choisit δ suffisamment petit, en fonction de ε, afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{M}} E_\Phi(A, y; \vartheta) E_\Phi(B, y; \vartheta) E_\Phi(C, y; -\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \\
&= \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \frac{\Psi(A, y)\Psi(B, y)\Psi(C, y)}{C} + O_{\varepsilon, \Phi}\left(C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A, y)\Psi(B, y)} + \frac{\Psi(A, y)\Psi(B, y)\Psi(C, y)}{u_A C}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
N(A, B, C, y; \Phi) = {} & \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_1 \frac{\Psi(A, y)\Psi(B, y)\Psi(C, y)}{C} \\
& + O_{\varepsilon, \Phi}\left(C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A, y)\Psi(B, y)} + \frac{\Psi(A, y)\Psi(B, y)\Psi(C, y)}{u_A C}\right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

□

1.4 Solutions primitives pondérées et solutions non pondérées

1.4.1 Étude des solutions primitives pondérées

On montre dans cette partie la deuxième assertion du Théorème 1.3. Soit $c_0 > 0$ la constante absolue donnée par le Théorème 1.6. Soit $\varepsilon > 0$ et $(x, y) \in \mathcal{D}(8 + \varepsilon, c_0)$. Une inversion de Möbius fournit

$$N^*(x, y; \Phi) = \sum_{P^+(d) \leq y} \mu(d) N\left(\frac{x}{d}, y; \Phi\right).$$

On pose $D_0 = x^{\delta_0}$ avec

$$\delta_0 = \frac{1 + \varepsilon - \alpha}{2\alpha - 1}$$

de sorte que $D_0^{1-2\alpha} \ll \Psi(x, y) x^{-1-\varepsilon/2}$. Dans le domaine $\mathcal{D}(8 + \varepsilon, c_0)$, on a $\alpha - 2/3 \gg 1$ donc pour ε suffisamment petit les inégalités $0 < \delta_0 < 1$, $1 \ll \delta_0$ et $1 \ll 1 - \delta_0$ sont valables. Lorsque $d > D_0$, on utilise la majoration triviale

$$N(x/d, y; \Phi) \ll_\Phi \Psi(Kx/d, y)^2 \ll_\Phi d^{-2\alpha} \Psi(x, y)^2$$

où K est tel que le support de Φ est inclus dans $]0,K]$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{P^+(d)\le y\\ d>D_0}} \mu(d) N\left(\frac{x}{d}, y; \Phi\right) &\ll_\Phi \Psi(x,y)^2 \sum_{D_0<d\le Kx} d^{-2\alpha}\\ &\ll \Psi(x,y)^2 D_0^{1-2\alpha} \ll \frac{\Psi(x,y)^3}{x^{1+\varepsilon/2}}\end{aligned}$$

qui est bien inclus dans le terme d'erreur de (1.5). Lorsque $d\le D_0$, on a $\log(x/d)\gg \log x$ ce qui implique que x/d est dans le domaine $\mathcal{D}(8+\varepsilon, c_0)$ quitte à prendre c_0 suffisamment petit. On peut donc utiliser l'estimation (1.4) et écrire

$$\begin{aligned}N^*(x,y;\Phi) = &\sum_{\substack{P^+(d)\le y\\ d\le D_0}} \mu(d)\mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha_{x/d})\mathfrak{S}_1(\alpha_{x/d})\frac{\Psi(x/d,y)^3}{x/d}\left\{1+O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{1}{u_{x/d}}\right)\right\}\\ &+O_\Phi\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x^{1+\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

On note que $u_{x/d}\asymp u$ pour $d\le D_0$, ainsi que $\sum_{d\ge 1} d^{1-3\alpha}\ll 1$. On a donc

$$N^*(x,y;\Phi) = \sum_{\substack{P^+(d)\le y\\ d\le D_0}} \mu(d)\mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha_{x/d})\mathfrak{S}_1(\alpha_{x/d})\frac{\Psi(x/d,y)^3}{x/d} + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{ux}\right).$$

Soit $D_1 = u^{1/(3\alpha-2)}$. L'inégalité $\alpha - 2/3 \gg 1$ fournit

$$\sum_{d>D_1} d^{1-3\alpha} \ll \frac{1}{u} \tag{1.22}$$

et ainsi

$$N^*(x,y;\Phi) = \sum_{\substack{P^+(d)\le y\\ d\le D_1}} \mu(d)\mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha_{x/d})\mathfrak{S}_1(\alpha_{x/d})\frac{\Psi(x/d,y)^3}{x/d} + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{ux}\right).$$

Il est montré dans [HT86] (équation 6.6) que l'on a

$$\alpha_{x/d} - \alpha \ll \frac{\log d}{u(\log y)^2}.$$

Dans le domaine $\mathcal{D}(8+\varepsilon, c_0)$ et lorsque $d\le D_1$

$$\frac{\log d}{u(\log y)^2} \ll \frac{\log u}{u(\log y)^2} \ll \frac{1}{u}.$$

On vérifie d'une part par convergence dominée que $(\partial\mathfrak{S}_0/\partial\alpha)(\Phi,\alpha)\ll 1$, d'autre part en considérant la dérivée logarithmique que $\mathfrak{S}_1'(\alpha)\ll 1$. On a donc

$$\mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha_{x/d}) = \mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha) + O\left(\frac{\log d}{u(\log y)^2}\right)$$

$$\mathfrak{S}_1(\alpha_{x/d}) = \mathfrak{S}_1(\alpha) + O\left(\frac{\log d}{u(\log y)^2}\right).$$

Il vient

$$N^*(x,y;\Phi) = \mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha) \sum_{\substack{P^+(d)\le y\\ d\le D_1}} \mu(d)\frac{\Psi(x/d,y)^3}{x/d} + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{ux}\right).$$

On a ensuite $t = (\log d)/\log y \ll (\log u)/\log y \ll 1$. L'estimation du Lemme B fournit donc

$$\Psi\left(\frac{x}{d},y\right) = \left\{1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}\frac{\Psi(x,d)}{d^\alpha}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} N^*(x,y;\Phi) &= \mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\sum_{\substack{P^+(d)\le y\\ d\le D_1}}\frac{\mu(d)}{d^{3\alpha-1}} + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{ux}\right)\\ &= \frac{\mathfrak{S}_0(\Phi,\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)}{\zeta(3\alpha-1,y)}\frac{\Psi(x,y)^3}{x} + O_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{ux}\right)\end{aligned}$$

en vertu encore une fois de (1.22). Ceci montre l'estimation (1.5) et achève la démonstration du Théorème 1.3.

1.4.2 Étude des solutions non pondérées

On montre dans cette section l'estimation (1.6). L'estimation (1.7) s'ensuit par une méthode identique à celle de la section précédente, simplifiée par le fait qu'on ne se préoccupe plus de la taille du terme d'erreur. Lorsque (x,y) vérifie les hypothèses du théorème 1.1, on a $(\log u)/\log y \ll 1/u$ ainsi que $\alpha = 1+O((\log u)/\log y)$ ce qui implique

$$\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha) = \frac{1}{2}+O\left(\frac{\log u}{\log y}\right)$$

et l'estimation (1.6) découle donc du théorème 1.1.

On suppose donc que (x,y) ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.1 pour par exemple $\varepsilon = 1/6$, en particulier, pour tout c_0 fixé on a $(\log y)H(u)^{-c_0} \le 1$ pour x et y assez grands. Il s'agit d'établir la borne supérieure de l'estimation (1.6), puisque la borne inférieure est montrée dans [LS12].

Soit $\varepsilon > 0$. On part de l'expression

$$N(x,y) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ k_1\ge k_3\\ k_2\ge k_3}} N(x2^{-k_1},x2^{-k_2},x2^{-k_3},y;\mathbf{1}_{]1/2,1]})$$

où on a noté $\mathbf{k} = (k_1,k_2,k_3)$.

Soit K_0 tel que que $2^{K_0} = x^{\delta_0}$, avec $\delta_0 = 1/\alpha - 1 + \varepsilon$, de sorte que $2^{-\alpha K_0} = o(\Psi(x,y)x^{-1})$. Alors par une majoration triviale et l'utilisation du Lemme B on a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ \max(k_1,k_2)\ge K_0}} N(x2^{-k_1},x2^{-k_2},x2^{-k_3},y;\mathbf{1}_{]1/2,1]}) &\ll N(x2^{-K_0},x,x,y;\mathbf{1}_{]0,1]})\\ &\ll 2^{-\alpha K_0}\Psi(x,y)^2 = o\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$N(x,y) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3 \\ K_0\geq k_1\geq k_3 \\ K_0\geq k_2\geq k_3}} N(x2^{-k_1}, x2^{-k_2}, x2^{-k_3}, y; \mathbf{1}_{]1/2,1]}) + o\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right)$$

On fixe $\delta > 0$ et on choisit une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $\mathbf{1}_{]1/2,1]} \leq \Phi \leq \mathbf{1}_{](1-\delta)/2,1+\delta]}$. On a

$$N(x,y) \leq \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3 \\ K_0\geq k_1\geq k_3 \\ K_0\geq k_2\geq k_3}} N(x2^{-k_1}, x2^{-k_2}, x2^{-k_3}, y; \Phi) + o\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right)$$

On note pour simplifier $A := x2^{-k_1}$, $B := x2^{-k_2}$, $C := x2^{-k_3}$. On peut appliquer le Théorème 1.6. Soient $c_0 > 0$ la constante absolue et $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ le réel donnés par le théorème, et supposons $(x,y) \in \mathcal{D}(4+\eta)$. On a alors $\alpha - 1/2 \gg 1$ donc $(\log A)/(\log C) \gg 1$ pour tous les indices k_1, k_3 vérifiant $k_1 \leq K_0$ et $k_3 \geq 0$. On vérifie ensuite que quitte à diminuer la constante absolue c_0 dans la définition de $\mathcal{D}(4+\eta)$, on a $(A,y), (B,y), (C,y) \in \mathcal{D}(4+\eta)$ lorsque $0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq K_0$: pour ces valeurs des indices, l'estimation (1.15) est donc valable. En remarquant de plus que

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3} C^{3/4+\varepsilon}\sqrt{\Psi(A,y)\Psi(B,y)} \ll x^{3/4+\varepsilon}\Psi(x,y)$$

on en déduit

$$\begin{aligned} N(x,y) \leq &\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3 \\ K_0\geq k_1\geq k_3 \\ K_0\geq k_2\geq k_3}} \mathfrak{S}_1(A,B,C,y)\mathfrak{S}_0(\Phi;A,B,C,y)\frac{\Psi(A,y)\Psi(B,y)\Psi(C,y)}{C} \\ &+ O_{\varepsilon,\Phi}\left(x^{3/4+\varepsilon}\Psi(x,y)\right) + o\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right). \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon \leq 1/48$ et tel que $4+\eta(\varepsilon) \leq 8$. On suppose $(x,y) \in \mathcal{D}(8+384\varepsilon)$, et on a alors de la même façon que dans la formule (1.16),

$$x^{3/4+\varepsilon}\Psi(x,y) = o\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right).$$

On pose $K_1 = \lfloor \log y/\log 2\rfloor$ de sorte que $2^{K_1} \asymp y$. Pour les valeurs des indices sur lesquelles on somme, on a

$$\mathfrak{S}_1(A,B,C,y)\mathfrak{S}_0(\Phi;A,B,C,y) \ll 1.$$

La contribution des indices vérifiant $\max(k_1,k_2)\geq K_1$ est donc

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ k_2\geq k_3\\ k_1\geq K_1}} \frac{\Psi(x2^{-k_1},y)\Psi(x2^{-k_2},y)\Psi(x2^{-k_3},y)}{x2^{-k_3}}\\
&\ll \frac{\Psi(x,y)^3}{x}\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ k_2\geq k_3\\ k_1\geq K_1}} 2^{-\alpha_A k_1-\alpha_B k_2+(1-\alpha_C)k_3}\\
&\ll \frac{\Psi(x,y)^3}{x}2^{-\alpha K_1}\sum_{k_3\geq 0}2^{(1-2\alpha)k_3}=o\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
N(x,y)\leq \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ K_1\geq k_1\geq k_3\\ K_1\geq k_2\geq k_3}} &\mathfrak{S}_1(A,B,C,y)\mathfrak{S}_0(\Phi;A,B,C,y)\frac{\Psi(A,y)\Psi(B,y)\Psi(C,y)}{C}\\
&+o_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la définition (1.14) on écrit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_0(\Phi;A,B,C,y)&=\alpha_A\alpha_B\alpha_C 2^{\alpha_A k_1}2^{\alpha_B k_2}2^{(\alpha_C-1)k_3}\times\\
&\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(v_1 2^{k_1})\Phi(v_2 2^{k_2})\Phi((v_1+v_2)2^{k_3})v_1^{\alpha_A-1}v_2^{\alpha_B-1}(v_1+v_2)^{\alpha_C-1}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2
\end{aligned}$$

où l'on a effectué les changements de variables $t_1\leftarrow v_1 2^{k_1}$ et $t_2\leftarrow v_2 2^{k_2}$. Pour les valeurs que parcourent les indices k_1, k_1 et k_3 on a

$$\max(|\alpha_A-\alpha|,|\alpha_B-\alpha|,|\alpha_C-\alpha|)\ll 1/(\log x).$$

En particulier on a

$$\mathfrak{S}_1(A,B,C,y)\sim\mathfrak{S}_1(\alpha).$$

Quant à la double intégrale, son intégrande est à support compact inclus dans $[0,1+\delta]^2$, et pour $v_1,v_2\leq 1+\delta$ on a

$$v_1^{\alpha_A-1}v_2^{\alpha_B-1}(v_1+v_2)^{\alpha_C-1}\sim (v_1v_2(v_1+v_2))^{\alpha-1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
N(x,y)\leq \mathfrak{S}_1(\alpha)\alpha^3 &\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ K_1\geq k_1\geq k_3\\ K_1\geq k_2\geq k_3}} 2^{\alpha_A k_1}2^{\alpha_B k_2}2^{(\alpha_C-1)k_3}\frac{\Psi(A,y)\Psi(B,y)\Psi(C,y)}{C}\\
&\times\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(v_1 2^{k_1})\Phi(v_2 2^{k_2})\Phi((v_1+v_2)2^{k_3})\left(v_1v_2(v_1+v_2)\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\\
&+o_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right).
\end{aligned}$$

Le Lemme B avec l'inégalité $K_1 \ll \log y$ fournit uniformément lorsque $0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq K_1$ les équivalents

$$\begin{aligned}\Psi(A,y) &\sim 2^{-\alpha_A k_1}\Psi(x,y)\\ \Psi(B,y) &\sim 2^{-\alpha_B k_2}\Psi(x,y)\\ \Psi(C,y) &\sim 2^{-\alpha_C k_3}\Psi(x,y)\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}N(x,y) \leq{}& \mathfrak{S}_1(\alpha)\alpha^3\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\\ &\times \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3\\ K_1\geq k_1\geq k_3\\ K_1\geq k_2\geq k_3}} \int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(v_1 2^{k_1})\Phi(v_2 2^{k_2})\Phi((v_1+v_2)2^{k_3})\,(v_1v_2(v_1+v_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\\ &+ o_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right).\end{aligned}$$

Soit $v \in \mathbf{R}$. De la majoration $\Phi \leq \mathbf{1}_{](1-\delta)/2,1+\delta]}$ on déduit, quitte à supposer $\delta < 1/2$,

$$\sum_{k\geq 0}\Phi(v2^k) \leq \mathbf{1}_{]0,1]}(v) + \mathbf{1}_{I_\delta}(v)$$

où on a noté $I_\delta = \cup_{k\geq 0}](1-\delta)2^{-k},(1+\delta)2^{-k}]$. Alors, en étendant la somme sur chaque indice à $\mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}^3}\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(v_1 2^{k_1})\Phi(v_2 2^{k_2})\Phi((v_1+v_2)2^{k_3})\,(v_1v_2(v_1+v_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\\ &\leq \int_0^1\int_0^{1-t_2}(t_1t_2(t_1+t_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\ &\quad+O\left(\int_{I_\delta}\int_0^1 (t_1t_2(t_1+t_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \int_0^1\int_0^1 \mathbf{1}_{I_\delta}(t_1+t_2)\,(t_1t_2(t_1+t_2))^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right).\end{aligned}$$

Par convergence dominée, le terme d'erreur tend vers 0 avec δ. On dispose donc d'une fonction $f(\delta)$ qui tend vers 0 telle que

$$N(x,y) \leq (1+f(\delta))\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x} + o_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right)$$

ce qui implique bien la majoration

$$N(x,y) \leq \mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha)\frac{\Psi(x,y)^3}{x} + o_{\varepsilon,\Phi}\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x}\right)$$

Cela montre la première assertion du Théorème 1.5, compte tenu de

$$\mathfrak{S}_0(\mathbf{1}_{]0,1]},\alpha)\mathfrak{S}_1(\alpha) \gg 1.$$

Chapitre 2

Sommes friables d'exponentielles et applications

2.1 Introduction

Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n > 1$, avec la convention $P(1) = 1$. Un entier $n \geq 1$ est dit y-friable si $P(n) \leq y$. On note

$$S(x,y) = \{n \leq x \mid P(n) \leq y\}$$

l'ensemble des entiers y-friables inférieurs ou égaux à x. Le cardinal $\Psi(x,y)$ de cet ensemble a fait l'objet d'abondantes études, les techniques variant suivant le domaine en x et y auquel on s'intéresse (*cf.* les articles de survol de Hildebrand & Tenenbaum [HT93] et Granville [Gra08] qui exposent de façon exhaustive les travaux antérieurs). Le problème qui nous intéresse est l'étude des sommes d'exponentielles tronquées sur les friables

$$E(x,y;\vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} \mathrm{e}(n\vartheta)$$

où l'on note $\mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2i\pi t}$. Le comportement de $E(x,y;\vartheta)$ diffère selon le degré de proximité de ϑ avec un rationnel de petit dénominateur. Pour tout entier $Q \geq 3$ et tout réel ϑ, il existe au moins un rationnel a/q avec

$$(a,q) = 1, \quad q \leq Q, \quad \left|\vartheta - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

On note $q(\vartheta, Q)$ le plus petit des dénominateurs q pour lesquels une fraction a/q vérifie cela ; dans ce cas $a = a(\vartheta, Q)$ est unique. Lorsque ϑ est irrationnel, on a

$$\lim_{Q\to\infty} q(\vartheta, Q) = \infty.$$

Une question intéressante est de déterminer dans quelle mesure la relation

$$E(x,y;\vartheta) = o(\Psi(x,y)) \tag{2.1}$$

est valable lorsque x et y tendent vers l'infini, avec ϑ irrationnel. Fouvry et Tenenbaum [FT91, théorème 10] montrent que la relation (2.1) a lieu pour tout $\delta > 0$ et ϑ irrationnel fixés lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant

$$x^{\delta(\log\log\log x)/\log\log x} \leq y \leq x.$$

La Bretèche [dlB98, corollaires 4 et 5] montre la validité de (2.1) pour tout ϑ irrationnel fixé lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant

$$\exp\{c(\log x \log\log x)^{2/3}\} \leq y \leq x$$

pour une certaine constante $c > 0$. L'argument présenté ici permet d'étendre encore le domaine de validité de (2.1). On définit le domaine

$$\exp\{c(\log x)^{1/2} \log\log x\} \leq y \leq x \tag{2.2}$$

Théorème 2.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que la relation* (2.1) *soit valable pour tout ϑ irrationnel fixé lorsque x et y tendent vers l'infini en restant dans le domaine $\mathcal{D}_c$.*

Le Théorème 2.1 découle d'une estimation asymptotique plus précise de la quantité $E(x, y; \vartheta)$; afin de l'énoncer, on définit

$$u := (\log x)/\log y$$

$$H(u) := \exp\left\{\frac{u}{\log(u+1)^2}\right\} \qquad (u \geq 1)$$

$$\zeta(s, y) := \sum_{P(n)\leq y} n^{-s} = \prod_{p\leq y} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \qquad (\sigma > 0).$$

En remarquant que $\mathbf{1}_{[1,x]}(n) \leq (x/n)^\sigma$ pour tout $\sigma > 0$, on obtient la majoration de Rankin [Ran38],

$$\Psi(x, y) \leq x^\sigma \zeta(\sigma, y) \qquad (2 \leq y \leq x, \sigma > 0).$$

Le membre de droite est minimal lorsque $\sigma = \alpha = \alpha(x, y)$, la solution à

$$\sum_{p\leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Pour x et y suffisamment grands, on a $0 < \alpha < 1$, et plus précisément lorsque $2 \leq y \leq x$,

$$\alpha(x, y) = \frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log(1+y)}{\log y}\right)\right\}, \tag{2.3}$$

voir par exemple [HT86, theorem 2]. On a par ailleurs (*cf.* [HT86, lemma 2]),

$$\alpha = 1 + O(\log(u+1)/\log y). \tag{2.4}$$

La majoration de Rankin fournit en fait une majoration de bonne qualité de $\Psi(x, y)$: elle n'est qu'à un facteur $O(\log x)$ de l'ordre de grandeur exact, obtenu par Hildebrand et Tenenbaum par la méthode du col (*cf.* [HT86, theorems 1, 2], formule (2.21) *infra*). Dans ce contexte, le réel α joue le rôle du point-selle.

De Bruijn [dB51] puis Saias [Sai89] ont obtenu une estimation de $\Psi(x, y)$ très précise pour les grandes valeurs de y. On définit

$$\Lambda(x, y) := \begin{cases} x\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u - v)\mathrm{d}(\lfloor y^v\rfloor/y^v) & \text{si } x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{N} \\ \Lambda(x+0, y) & \text{si } x \in \mathbf{N} \end{cases}$$

où $u \mapsto \rho(u)$ est la fonction de Dickman, l'unique solution continue sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle aux différences $u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0$ $(u > 1)$ satisfaisant $\rho(u) = 1$ $(u \in [0, 1])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, dans le domaine (H_ε) défini par

$$3 \leq \exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x \tag{H_ε}$$

on a

$$\Psi(x,y) = \Lambda(x,y)\{1 + O_\varepsilon(\mathcal{Y}_\varepsilon^{-1})\} \tag{2.5}$$

où l'on a posé pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{Y}_\varepsilon := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\} \tag{2.6}$$

On pose également, de même que dans [dlBG12],

$$\lambda(t,y) := \frac{\Lambda(t,y)}{t} + \frac{1}{\log y}\int_{-\infty}^{\infty} \rho'((\log t)/\log y - v)\mathrm{d}(\lfloor y^v \rfloor / y^v).$$

On a l'égalité entre mesures

$$\mathrm{d}\Lambda(t,y) = \lambda(t,y)\mathrm{d}t - t\mathrm{d}(\{t\}/t). \tag{2.7}$$

Par ailleurs, la quantité $\lambda(t,y) - y\{t/y\}/(t\log y)$ est dérivable par rapport à t pour tout $t \geq y$. On note $\lambda'(t,y)$ cette dérivée.

On reprend les notations de La Bretèche et Granville [dlBG12] pour la région sans zéro des fonctions L de Dirichlet, et du zéro exceptionnel. Il existe une constante $b > 0$ telle que pour tout $Q \geq 2$ et $T \geq 2$, la fonction $s \mapsto L(s,\chi)$ n'admette pas de zéro dans la région

$$\Big\{ s = \sigma + i\tau \in \mathbf{C} \mid \sigma \geq 1 - \frac{b}{\log(QT)} \text{ et } |\tau| \leq T \Big\} \tag{2.8}$$

pour tous les caractères χ de modules q avec $1 \leq q \leq Q$ sauf éventuellement pour des caractères tous associés à un même caractère primitif χ_1 de module noté q_1. Si ce caractère existe, il est quadratique et le zéro exceptionnel, noté β, est unique, simple et réel ; si pour une même valeur de Q et deux valeurs distinctes de T, un tel caractère existe, alors il s'agit du même et on dira que ce caractère est Q-exceptionnel, tout en notant que pour des valeurs de T suffisamment grandes en fonction de Q, un tel caractère n'existe pas. Le « caractère de module 1 » désigne ici le caractère trivial, et la fonction L associée est la fonction $s \mapsto \zeta(s)$. On note χ_r le caractère de module $q_1 r$ associé à χ_1, et on pose $q \mapsto \nu(q)$ la fonction indicatrice des entiers multiples de q_1 si β existe, et la fonction nulle sinon. On garde dans toute la suite la notation $s = \sigma + i\tau$.

On désigne par $\check{\Phi}_0(\lambda, s)$ la fonction définie pour $\sigma > 0$ par

$$\check{\Phi}_0(\lambda,s) := \int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)t^{s-1}\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

En développant en série entière le terme $\mathrm{e}(\lambda t)$ on obtient $\check{\Phi}_0(\lambda,s) = \sum_{n\geq 0}(2i\pi\lambda)^n/((n+s)n!)$, et cela permet de prolonger $s \mapsto \check{\Phi}_0(\lambda,s)$ en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, qui possède un pôle simple en $s = 0$ de résidu 1, et lorsque $\lambda \neq 0$, un pôle simple en $s = -n$ pour tout entier $n \geq 1$, de résidu $(2i\pi\lambda)^n/n!$.

Enfin on note respectivement $\omega(n)$ et $\tau(n)$ le nombre de facteurs premiers et le nombre de diviseurs d'un entier $n \geq 1$, et on pose

$$\mathcal{L} := \exp\sqrt{\log x},$$

$$T_1 = T_1(x,y) := \min\{y, \mathcal{L}\}, \qquad T_2 = T_2(x,y) := \min\{y^{1/\log\log\log x}, \mathcal{L}\}. \tag{2.10}$$

Théorème 2.2. *Il existe des constantes c_1 et c_2 positives et une fonction $W(x, y; q, \eta)$ telles que pour tout (x, y) dans le domaine*

$$(\log x)^{c_1} \leq y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}, \tag{2.11}$$

pour tout $\vartheta \in \mathbf{R}$ avec $\vartheta = a/q + \eta$ où $(a, q) = 1$, $q \leq T_2^{c_2}$ et $|\eta| \leq T_2^{c_2}/x$ on ait

$$\begin{aligned} E(x, y; \vartheta) = {} & \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \prod_{p|q} (1 - p^{\alpha-1}) \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \Psi(x, y) + \nu(q) \chi_1(a) W(x, y; q, \eta) \\ & + O\left(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q)(1 + |\eta|x)^\alpha} \frac{(\log q)^2 (\log(2 + |\eta|x))^3}{u} + \frac{\Psi(x, y)}{T_2^{c_2}} \right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

où χ_1 est l'éventuel caractère $T_2^{c_2}$-exceptionnel, et avec, dans le cas $\nu(q) \neq 0$,

$$W(x, y; q, \eta) \ll \frac{2^{\omega(q/q_1)} \sqrt{q_1} (q/q_1)^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q)(1 + |\eta|x)^\alpha x^{1-\beta} H(u)^{c_2}} + \frac{2^{\omega(q/q_1)} \sqrt{q_1} (q/q_1)^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q) T_2^{c_2}}. \tag{2.13}$$

Si de plus on a $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, $q \leq \mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta| \leq \mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)$ pour un certain $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned} E(x, y; \vartheta) = {} & \widetilde{V}(x, y; q, \eta) + \nu(q) \chi_1(a) W(x, y; q, \eta) \\ & + O_\varepsilon\left(\frac{2^{\omega(q)} \Psi(x, y)}{\varphi(q) \mathcal{Y}_\varepsilon} + \frac{\Psi(x, y)}{T_2^{c_2}} \right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

où l'on a posé

$$\widetilde{V}(x, y; q, \eta) := \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ k|n}} \mathrm{e}(n\eta) \lambda\left(\frac{n}{k}, y\right). \tag{2.15}$$

Remarque 2.1. Les conditions sur q et η dans l'estimation (2.12) sont moins restrictives que celles de (2.14), mais son terme d'erreur est moins bon.

Les estimations du Théorème 2.2 ne sont valables que lorsque ϑ est proche d'un rationnel à petit dénominateur, ce qui correspond aux arcs majeurs dans la terminologie de la méthode du cercle. Les valeurs complémentaires de ϑ sont traitées à l'aide du résultat suivant, déduit de [dlB98, corollaire 3].

Lemme A ([dlB98], corollaire 3)**.** *Lorsque les réels ϑ, x, R vérifient $x, R \geq 2$ et $q(\vartheta, \lceil x/R \rceil) \geq R$, on a*

$$E(x, y; \vartheta) \ll x(\log x)^4 \{1/R^{1/4} + 1/\mathcal{L}\}.$$

Démonstration du Théorème 2.1. Soient c_1 et c_2 les constantes données par le Théorème 2.2 et supposons $y^{1/\log\log\log x} \geq \mathcal{L}$, de sorte que $T_1 = T_2 = \mathcal{L}$. On pose $q = q(\vartheta, \lceil x/\mathcal{L}^{c_2} \rceil)$ et $\theta = a/q + \eta$ avec $\eta \leq 1/(q\lceil x/\mathcal{L}^{c_2} \rceil)$; on a $|\eta|x \leq \mathcal{L}^{c_2}$. Lorsque $y \geq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, les résultats de La Bretèche [dlB98, théorème 2] s'appliquent, on suppose donc sans perte de généralité que $y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$. Lorsque $q > \mathcal{L}^{c_2}$, d'après le Lemme A on a $E(x, y; \vartheta) \ll x/\mathcal{L}^{c_3}$ pour une constante $c_3 > 0$. Pour $\exp\{c\sqrt{\log x} \log\log x\} \leq y$ avec c suffisamment grande, cela est $o(\Psi(x, y))$. Enfin, lorsque $q \leq \mathcal{L}^{c_2}$, l'estimation (2.12) est valable et tous les termes du membre de droite sont $o(\Psi(x, y))$ quand $q \to \infty$ et $x \to \infty$, en remarquant que $\check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \ll 1$. □

La démonstration que l'on propose du Théorème 2.2 utilise une majoration du type

$$H(u)^{-\delta}(\log x) \ll_\delta 1$$

pour tout $\delta > 0$ fixé, qui n'est pas valable lorsque y est trop proche de x. Ceci explique la borne supérieure en y du domaine (2.11).

Le domaine en x et y dans lequel on peut majorer non trivialement $E(x, y; \vartheta)$ pour ϑ irrationnel a une influence directe sur le domaine de validité de certains résultats qui sont liés aux sommes d'exponentielles. On en cite deux ; le premier est une généralisation d'un théorème de Daboussi [Dab75].

Théorème 2.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $Y : [2, \infty[\to \mathbf{R}$ croissante avec $(Y(x), x) \in \mathcal{D}_c$, toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ multiplicative satisfaisant pour tous x et y avec $Y(x) \leq y \leq x$,*

$$\sum_{n \in S(x,y)} |f(n)|^2 \leq K_f \Psi(x, y)$$

pour un certain réel $K_f > 0$ dépendant au plus de f, et tout ϑ irrationnel, lorsque x et y tendent vers l'infini avec $Y(x) \leq y \leq x$, on ait

$$\sum_{n \in S(x,y)} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta) = o_\vartheta(K_f^{1/2}\Psi(x, y)).$$

Cela est une extension de [dlBT05a, théorème 1.5]. Suivant Dupain, Hall et Tenenbaum [DHT82], on peut se poser la question de savoir pour quelle classe de fonctions multiplicatives f et quelles suites d'ensembles finis d'entiers $(E_N)_{N \geq 1}$ la relation

$$\sum_{n \in E_N} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta) = o\Big(\sum_{n \in E_N} |f(n)|\Big)$$

est valable pour tout ϑ irrationnel fixé lorsque $N \to \infty$. Le Théorème 2.3 aborde le cas particulier $E_N = S(N, y_N)$ avec $Y(N) \leq y_N \leq N$.

La deuxième application que l'on considère concerne le problème du comptage des solutions friables à l'équation $a + b = c$. Posons

$$N(x, y) := \mathrm{card}\ \{(a, b, c) \in S(x, y)^3 \mid a + b = c\}. \tag{2.16}$$

Lagarias et Soundararajan étudient cette quantité dans [LS11]. Leur travail, précisé par l'auteur [Dra13], implique en particulier qu'en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet, on a

$$N(x, y) \sim \frac{\Psi(x, y)^3}{2x} \tag{2.17}$$

lorsque $(\log\log x)/\log y \to 0$. Dans [dlBG12], La Bretèche et Granville obtiennent inconditionnellement, à partir des estimations de $E(x, y; \vartheta)$ démontrées dans [dlB98], que la relation (2.17) est valable, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, lorsque x et y tendent vers l'infini avec $\exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x$. Les estimations de $E(x, y; \vartheta)$ présentées ici permettent d'étendre le domaine de validité de cette estimation.

Théorème 2.4. *Il existe $c > 0$ tel que lorsque $(x, y) \in \mathcal{D}_c$, on ait*

$$N(x, y) = \frac{\Psi(x, y)^3}{2x}\left\{1 + O\left(\frac{\log(u + 1)}{\log y}\right)\right\}. \tag{2.18}$$

Remarque 2.2. Le terme d'erreur dans l'estimation (2.18) est attendu comme optimal. On peut, à la façon de Saias [Sai89], obtenir un développement du membre de gauche selon les puissances de $(\log y)^{-1}$.

Dans [dlBG12], les auteurs étudient la densité sur les friables d'une suite générale satisfaisant des hypothèses de crible. Cette application n'est pas développée ici mais le Théorème 2.2 permet d'étendre leur résultat à tout $(x, y) \in \mathcal{D}_c$ pour un certain $c > 0$.

Remerciements. L'auteur adresse ses vifs remerciements son directeur de thèse Régis de la Bretèche pour sa grande patience et ses nombreux conseils, à Adam Harper pour des remarques qui ont aidé à améliorer ce manuscrit.

2.2 Estimation de $E(x, y; \vartheta)$

2.2.1 Méthode du col

Soit à étudier la fonction sommatoire sur les entiers friables d'une suite de nombres complexes de modules ≤ 1

$$A(x, y) = \sum_{n \in S(x,y)} a_n$$

lorsque $x \notin \mathbf{N}$, prolongée par $A(x, y) := A(x-0, y) + a_x/2$ lorsque x est un entier y-friable. La série de Dirichlet associée

$$F(s, y) := \sum_{P(n) \leq y} a_n n^{-s} \tag{2.19}$$

converge absolument lorsque $\sigma > 0$. En appliquant la formule de Perron, on écrit

$$A(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s, y) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

où $\kappa > 0$ est fixé. La méthode du col consiste à modifier le chemin d'intégration pour faire en sorte que la contribution principale à l'intégrale entière vienne d'une petite partie du chemin d'intégration, suffisamment petite pour pouvoir l'estimer par une formule de Taylor. Dans le cas $a_n = 1$, où il s'agit essentiellement d'estimer $\Psi(x, y)$, on intègre sur la droite $\sigma = \alpha$. Le point α est le minimum de la fonction $\sigma \mapsto x^\sigma \zeta(\sigma, y)$ et sa dérivée seconde en ce point est non nulle, le point $\tau = 0$ est donc un maximum local de la fonction $\tau \mapsto |x^{\alpha + i\tau} \zeta(\alpha + i\tau, y)|$. On définit

$$\sigma_2 = \sigma_2(x, y) := \sum_{p \leq y} \frac{p^\alpha (\log p)^2}{(p^\alpha - 1)^2}$$

qui est la valeur en α de la dérivée seconde de la fonction $s \mapsto \log \zeta(s, y)$. Lorsque $2 \leq y \leq x$, on a d'après [HT86, theorem 2],

$$\sigma_2(x, y) = \log x \log y \left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log(1+u)} + \frac{1}{\log y}\right)\right\}. \tag{2.20}$$

Le résultat principal de [HT86] est l'estimation, uniforme pour $2 \leq y \leq x$,

$$\Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha \sqrt{2\pi\sigma_2}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right)\right\}. \tag{2.21}$$

Par rapport aux précédents résultats sur $\Psi(x, y)$, cette estimation a l'avantage, au prix d'un terme principal moins explicite, d'être valide sans aucune contrainte sur x et y. L'estimation (2.20) implique en particulier que pour tout (x, y) avec $2 \leq y \leq x$, on a

$$\zeta(\alpha, y)x^\alpha \ll (\log x)\Psi(x, y). \tag{2.22}$$

Un autre intérêt de la méthode du col est qu'elle permet une étude uniforme du rapport $\Psi(x/d, y)/\Psi(x, y)$, ce qui est utile dans beaucoup d'applications. Cette question ainsi que d'autres problèmes associés sont étudiés en détail dans [dlBT05b].

Lemme B ([dlBT05b], théorème 2.4)**.** *Il existe deux constantes positives b_1 et b_2 et une fonction $b = b(x, y; d)$ satisfaisant $b_1 \leq b \leq b_2$ telles que pour $\log x \leq y \leq x$ et $1 \leq d \leq x$ on ait uniformément*

$$\Psi\left(\frac{x}{d}, y\right) = \left\{1 + O\left(\frac{t}{u}\right)\right\}\left(1 - \frac{t^2}{u^2}\right)^{bu} \frac{\Psi(x, y)}{d^\alpha}$$

où l'on a posé $t = (\log d)/\log y$.

Cela implique sous les mêmes hypothèses la majoration

$$\Psi(x/d, y) \ll \Psi(x, y)/d^\alpha, \tag{2.23}$$

celle-ci étant valable pour tout $d \geq 1$.

2.2.2 Somme sur les caractères, formule de Perron

Pour tout caractère de Dirichlet χ de module q, on définit la somme de Gauss $\tau(\chi) := \sum_{b \pmod q} \chi(b)\mathrm{e}(b/q)$. On a pour tous x et y avec $x \geq y \geq 2$, $\vartheta \in \mathbf{R}$ et $(a, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ avec $\vartheta = a/q + \eta$,

$$E(x, y; \vartheta) = \sum_{\substack{d|q \\ P(d) \leq y}} \frac{1}{\varphi(q/d)} \sum_{\chi \pmod{q/d}} \chi(a)\tau(\overline{\chi}) \sum_{m \in S(x/d, y)} \mathrm{e}(md\eta)\chi(m). \tag{2.24}$$

Une façon d'étudier $E(x, y; \vartheta)$ est donc d'obtenir des estimations uniformes de la somme

$$\Psi_0(z, y; \chi, \gamma) := \sum_{n \in S(z, y)} \mathrm{e}(n\gamma)\chi(n). \tag{2.25}$$

On rappelle que $\check{\Phi}_0(\lambda, s)$ et $F(s, y)$ sont définis respectivement en (2.9) et (2.19).

Lemme 2.1. *Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que l'abscisse de convergence absolue de la série $\sum_{P(n) \leq y} a_n n^{-s}$ soit strictement inférieure à $1/2$. Lorsque $x, y \geq 2$, $\eta \in \mathbf{R}$, $T \geq 2$, $\kappa \in [1/2, 1]$, $c \in]0, 1/2]$ et $M \geq 0$, et lorsque les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\sum_{P(n) \leq y} |a_n| n^{-\kappa} \leq M\zeta(\kappa, y) \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{P(n) \leq y \\ |n - x| < x/\sqrt{T}}} |a_n| \leq M\Psi(x, y)/T^c,$$

on a uniformément

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x, y)} a_n \mathrm{e}(n\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(s, y) x^s \check{\Phi}_0(\eta x, s) \mathrm{d}s \\ + O\left(M(\log T)(1 + |\eta x|)\frac{x^\kappa \zeta(\kappa, y)}{T^c}\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Remarque 2.3. En particulier, si l'on suppose que la suite (a_n) est bornée, un théorème de Hildebrand sur le nombre des friables dans les petits intervalles [Hil85, theorem 4] ainsi que la majoration (2.23) assurent que les hypothèses sur $(a_n)_{n\geq 1}$ sont satisfaites pour M absolu et $c = \alpha(x,y)/2$. Lorsque $(\log x)^K \leq y \leq x$ pour un certain $K > 1$ fixé, on a $\alpha(x,y) \gg_K 1$.

Le Lemme 2.1 découle du lemme suivant, qui est une généralisation d'un lemme classique de Perron (*cf.* [Ten07, lemme II.2.2]).

Lemme 2.2. *Pour tous réels x, κ, T et λ avec $x \geq 0$, $\kappa \in [1/2, 1]$ et $T \geq 2$, on a*

$$\left|\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\mathrm{e}(\lambda/x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \check{\Phi}_0(\lambda,s)\mathrm{d}s\right| \ll \frac{(\log T)(1+|\lambda|)x^\kappa}{1+T|\log x|}.$$

On énonce pour cela un lemme qui fournit des informations sur la taille de $\check{\Phi}_0$.

Lemme 2.3. *Pour tous $s \in \mathbf{C}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ avec $\sigma \geq 1/2$, on a*

$$\check{\Phi}_0(\lambda,s) \ll \min\left\{\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{|s|}{\sigma}\log(2+|\lambda|)\big(|\lambda|^{-\sigma}+|\lambda|^{-1}\big), \quad \frac{1+|\lambda|/\sigma}{|s|}\right\}.$$

Démonstration. On a trivialement $\check{\Phi}_0(\lambda,s) \ll 1/\sigma$. On a d'une part lorsque $|\lambda| \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)t^{s-1}\mathrm{d}t &= \left[\frac{\mathrm{e}(\lambda t)-1}{2i\pi\lambda}t^{s-1}\right]_0^1 - (s-1)\int_0^1 \frac{\mathrm{e}(\lambda t)-1}{2i\pi\lambda}t^{s-2}\mathrm{d}t \\ &\ll |\lambda|^{-1} + |s-1|\Big(\frac{|\lambda|^{-\sigma}}{\sigma} + \frac{|\lambda|^{-1}-|\lambda|^{-\sigma}}{\sigma-1}\Big) \\ &\ll \frac{|s|}{\sigma}\log(2+|\lambda|)\big(|\lambda|^{-\sigma}+|\lambda|^{-1}\big)\end{aligned}$$

en séparant l'intégrale selon la position de t par rapport à $1/|\lambda|$, et d'autre part, pour tout λ,

$$\int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)t^{s-1}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}(\lambda t)\frac{t^s}{s}\right]_0^1 - \frac{1}{s}\int_0^1 (2i\pi\lambda)\mathrm{e}(\lambda t)t^s\mathrm{d}t \ll \frac{1+|\lambda|/\sigma}{|s|}.$$

Le résultat suit en notant que $|s|\log(2+|\lambda|)/|\lambda|^\sigma \gg 1$ pour $|\lambda| < 1$. □

Démonstration du lemme 2.2. Le cas $\lambda = 0$ étant démontré dans [Ten07, lemme II.2.2], on suppose $\lambda \neq 0$. On rappelle que la fonction $s \mapsto \check{\Phi}_0(\lambda,s)$ est prolongeable en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant pour tout $n \geq 0$ un pôle simple en $s = -n$, de résidu $(2i\pi\lambda)^n/n!$. On suppose $x < 1$. Pour tout réel $k \geq 0$, en intégrant sur le rectangle de côtés

$$\kappa + k \pm iT, \kappa \pm iT$$

on obtient grâce aux majorations du Lemme 2.3,

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s\check{\Phi}_0(\lambda,s)\mathrm{d}s \ll \frac{(1+|\lambda|)x^\kappa(1-x^k)}{T|\log x|} + \frac{T(1+|\lambda|)x^{\kappa+k}}{k+\kappa} \ll \frac{(1+|\lambda|)x^\kappa}{T|\log x|} \tag{2.27}$$

en faisant tendre k vers l'infini.

Pour $x \geq 1$, d'après la définition de $\check{\Phi}_0(\lambda, s)$, on a

$$\begin{aligned} I := \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \check{\Phi}_0(\lambda, s) \mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{-T}^{T} (tx)^{i\tau} \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{e}(\lambda t) \frac{(tx)^\kappa}{t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{T \log x} \frac{\sin w}{w} \mathrm{e}(\lambda \mathrm{e}^{w/T}/x) \mathrm{e}^{\kappa w/T} \mathrm{d}w \end{aligned}$$

ayant posé $xt = e^{w/T}$. Une intégration par parties permet d'écrire $I = I_1 + I_2 - I_3$ avec

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{T \log x} \frac{1-\cos w}{w^2} \mathrm{e}(\lambda \mathrm{e}^{w/T}/x) \mathrm{e}^{\kappa w/T} \mathrm{d}w, \\ I_2 &:= \frac{1-\cos(T \log x)}{\pi T \log x} \mathrm{e}(\lambda) x^\kappa, \\ I_3 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{T \log x} \frac{1-\cos w}{w} \left(\frac{2i\pi\lambda}{xT} \mathrm{e}^{w/T} + \frac{\kappa}{T} \right) \mathrm{e}(\lambda \mathrm{e}^{w/T}/x) \mathrm{e}^{\kappa w/T} \mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Des estimations élémentaires fournissent

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{e}(\lambda/x) - \frac{\mathrm{e}(\lambda/x)}{\pi} \int_{T \log x}^{\infty} \frac{1-\cos w}{w^2} \mathrm{d}w \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{T \log x} \frac{1-\cos w}{w^2} \Big(\mathrm{e}(\lambda \mathrm{e}^{w/T}/x) \mathrm{e}^{\kappa w/T} - \mathrm{e}(\lambda/x) \Big) \mathrm{d}w \\ &= \mathrm{e}(\lambda/x) + O\left(\frac{1}{1+T\log x} + \frac{x^\kappa}{T(1+(\log x)^2)} + \frac{\log T}{T} \left(1 + \frac{|\lambda|}{x} \right) \right), \\ I_2 &\ll \frac{T(\log x) x^\kappa}{1+(T \log x)^2}, \\ I_3 &\ll \frac{\log T}{T} \left(1 + \frac{|\lambda|}{x} \right) + \frac{(\log T)(1+|\lambda|) x^\kappa}{T \log x} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(T \log x). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $x > 1$, on a

$$\left| \mathrm{e}(\lambda/x) - \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \check{\Phi}_0(\lambda, s) \mathrm{d}s \right| = O\left(\frac{(\log T)(1+|\lambda|) x^\kappa}{T \log x} \right) \tag{2.28}$$

et lorsque $x = 1$, on a

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \check{\Phi}_0(\lambda, s) \mathrm{d}s \ll 1 + \frac{(\log T)(1+|\lambda|)}{T} \ll 1 + |\lambda|. \tag{2.29}$$

Lorsque $T|\log x| \geq 1$ l'estimation voulue découle de (2.27) et (2.28). Si $\mathrm{e}^{-1/T} < x < \mathrm{e}^{1/T}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \check{\Phi}_0(\lambda, s) \mathrm{d}s &= \frac{x^\kappa}{2\pi} \int_{-T}^{T} \check{\Phi}_0(\lambda, \kappa+i\tau) \mathrm{d}\tau + \frac{x^\kappa}{2\pi} \int_{-T}^{T} (x^{i\tau}-1) \check{\Phi}_0(\lambda, \kappa+i\tau) \mathrm{d}\tau \\ &\ll (1+|\lambda|) x^\kappa \end{aligned}$$

grâce à la majoration (2.29) et au Lemme 2.3. Cela implique

$$\left| \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x) \mathrm{e}(\lambda/x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \check{\Phi}_0(\lambda, s) \mathrm{d}s \right| \ll (1+|\lambda|) x^\kappa$$

ce qui fournit l'estimation voulue pour $T|\log x| < 1$. □

Remarque 2.4. Un traitement plus fin de I_1 permet d'obtenir dans le cas $x = 1$,

$$\left| \frac{\mathrm{e}(\lambda)}{2} - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \check{\Phi}_0(\lambda, s) \mathrm{d}s \right| \ll \frac{(\log T)(1 + |\lambda|)}{T}$$

mais cela ne sera pas utilisé ici.

Démonstration du lemme 2.1. Une application du Lemme 2.2 avec x remplacé par x/n et λ par ηx permet d'écrire sous les hypothèses de l'énoncé,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S(x,y)} a_n \mathrm{e}(n\eta) = &\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s,y) x^s \check{\Phi}_0(\eta x, s) \mathrm{d}s \\ &+ O\left((\log T)(1 + |\eta x|) x^\kappa \sum_{P(n) \le y} \frac{|a_n| n^{-\kappa}}{1 + T|\log(x/n)|} \right). \end{aligned}$$

De même que dans [FT91, preuve du théorème 4], on sépare la somme dans le terme d'erreur selon la taille de $|\log(n/x)|$. Les entiers $n \in]x - x/\sqrt{T}, x + x/\sqrt{T}[$ contribuent d'une quantité

$$\ll (\log T)(1 + |\eta x|) \sum_{\substack{P(n) \le y \\ x - x/\sqrt{T} < n \le x + x/\sqrt{T}}} |a_n|$$

qui est de l'ordre du terme d'erreur annoncé grâce aux hypothèses sur (a_n) ainsi que la majoration $\Psi(x,y) \le x^\kappa \zeta(\kappa, y)$. La contribution des entiers $n \notin]x - x/\sqrt{T}, x + x/\sqrt{T}[$ est

$$\ll (\log T)(1 + |\eta x|) \frac{x^\kappa}{\sqrt{T}} \sum_{P(n) \le y} |a_n| n^{-\kappa}$$

qui est à nouveau de l'ordre du terme d'erreur annoncé. □

On montre enfin le résultat suivant, qui assure que dans le cadre des Propositions 2.10 et 2.13 *infra*, les hypothèses du Lemme 2.1 sont vérifiées avec $\kappa = \alpha$.

Lemme 2.4. *Soient $q \ge 1$ un entier y-friable, et q_1 un diviseur de q. Soit χ_1 un caractère primitif modulo q_1 et pour tout $r \ge 1$, χ_r le caractère modulo $q_1 r$ associé à χ_1. On note $r_1 := q/q_1$ et on pose pour tout $n \ge 1$,*

$$a_n := \frac{\tau(\chi_1) \mu\left(\frac{r_1}{(r_1,n)}\right) \chi_1\left(\frac{r_1}{(r_1,n)}\right) \chi_{\frac{r_1}{(r_1,n)}}\left(\frac{n}{(r_1,n)}\right)}{\varphi(q_1) \varphi\left(\frac{r_1}{(r_1,n)}\right)}$$

Alors lorsque $\kappa \in [1/2, 1]$, $2 \le y \le x$ et $2 \le T \le x$, on a uniformément

$$\begin{aligned} \sum_{P(n) \le y} |a_n| n^{-\kappa} &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)} \sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\kappa} \zeta(\kappa, y), \\ \sum_{\substack{P(n) \le y \\ |n-x| < x/\sqrt{T}}} |a_n| &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)} \sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} \frac{\Psi(x,y)}{T^{\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a, en écrivant $(n, r_1) = r_1/d$ et $n = mr_1/d$,

$$\begin{aligned}
\sum_{P(n)\leq y} |a_n| n^{-\kappa} &= \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{-\kappa} \sum_{\substack{d|r_1\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu^2(d) d^\kappa}{\varphi(d)} \sum_{\substack{P(m)\leq y\\(m,q_1 d)=1}} m^{-\kappa} \\
&= \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{-\kappa} \zeta(\kappa, y) \prod_{p|q_1} (1 - p^{-\kappa}) \prod_{\substack{p|q/q_1\\p\nmid q_1}} \left(1 + \frac{p^\kappa - 1}{p-1}\right) \\
&\leq \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\kappa} \zeta(\kappa, y) 2^{\omega(q/q_1)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les mêmes notations, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{P(n)\leq y\\|n-x|\leq x/\sqrt{T}}} |a_n| &= \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\substack{d|r_1\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{P(m)\leq y\\|mr_1/d-x|\leq x/\sqrt{T}\\(m,q_1 d)=1}} 1 \\
&\leq \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\substack{d|r_1\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \Big(\Psi(xd(1 + 1/\sqrt{T})/r_1, y) - \Psi(xd(1 - 1/\sqrt{T})/r_1, y)\Big) \\
&\leq 2\frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)} \sum_{\substack{d|r_1\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \Psi(xd/(r_1\sqrt{T}), y)
\end{aligned}$$

d'après [Hil85, theorem 4]. La majoration (2.23) a lieu avec d remplacé par $\sqrt{T} r_1/d$ et ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{P(n)\leq y\\|\frac{n}{x}-1|\leq 1/\sqrt{T}}} |a_n| &\ll \frac{\sqrt{q_1}\Psi(x, y)}{\varphi(q_1) T^{\alpha/2}} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{-\alpha} \sum_{\substack{d|r_1\\(d,q_1)=1}} \frac{\mu^2(d) d^\alpha}{\varphi(d)} \\
&= \frac{\sqrt{q_1}\Psi(x, y)}{\varphi(q_1) T^{\alpha/2}} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{-\alpha} \prod_{\substack{p|q/q_1\\p\nmid q_1}} \left(1 + \frac{p^\alpha}{p-1}\right) \\
&\leq \frac{\sqrt{q_1}\Psi(x, y)}{\varphi(q) T^{\alpha/2}} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} 2^{\omega(q/q_1)}
\end{aligned}$$

qui est bien la majoration voulue. □

2.2.3 Estimation de $L(s, \chi; y)$ dans la bande critique

Une application du Lemme 2.1 fournit lorsque $z \notin \mathbf{N}$

$$\Psi_0(z, y; \chi, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} L(s, \chi; y) z^s \check{\Phi}_0(\gamma x, s) \mathrm{d}s \tag{2.30}$$

où l'intégrale converge en valeur principale. Le lemme suivant, repris pour l'essentiel de [Har12a, Lemma 1], fournit un contrôle sur les variations de $L(s, \chi; y)$. La qualité de cette estimation est étroitement liée à notre connaissance d'une région sans zéro pour $L(s, \chi)$.

Dans cette section et les suivantes, c_1 et c_2 désignent toujours des constantes absolues positives, c_1 étant choisie typiquement grande et c_2 typiquement petite.

Lemme 2.5. *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que lorsque χ est un caractère primitif de module $q > 1$, $\varepsilon \in]0, 1/2]$, $H \geq 4$ et lorsque la fonction $L(s, \chi)$ n'a pas de zéro dans la région*

$$\{s \in \mathbf{C} \mid \sigma \in]0, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1], \tau \in [-H, H]\}, \tag{2.31}$$

alors pour tout $y \geq (qH)^{c_1}$ et tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\sigma \in [0, 1[$ et $|\tau| \leq H/2$, on ait

$$\sum_{n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} = O\left(\frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon}}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{(1-\sigma)H} + \log(qH) + \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{2.32}$$

Si χ est réel et si $L(s, \chi)$ a dans la région (2.31) un unique zéro β, qui est réel, alors

$$\sum_{n \leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} = -\frac{y^{\beta - s} - 1}{\beta - s} + O\left(\frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon}}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{(1-\sigma)H} + \log(qH) + \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{2.33}$$

Enfin, si la fonction ζ n'a pas de zéro dans la région (2.31), alors

$$\sum_{n \leq y} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{y^{1-s} - 1}{1-s} + O\left(\frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon}}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(yH)}{(1-\sigma)H} + \log H + \frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{2.34}$$

Démonstration. L'estimation (2.32) découle d'un cas particulier de [Har12a, Lemma 1]. L'estimation (2.34) est à rapprocher de [HT86, Lemma 8]. Les cas complémentaires n'apportent pas de difficulté essentielle. Par souci de complétude on en reprend ici la démonstration, qui suit celle de Harper [Har12a, Lemma 1]. Afin d'unifier les calculs dans les différents cas, on se donne χ un caractère primitif de module $q \geq 1$ qui peut être le caractère trivial, et suivant les cas :

- lorsque $\chi = \mathbf{1}$, on note $\theta(\chi) := -1$ et $\beta_\chi := 1$,
- sinon, si $L(s, \chi)$ ne s'annule pas dans la région (2.31), on pose $\theta(\chi) := 0$,
- enfin, si χ est réel et si $L(s, \chi)$ s'annule une seule fois dans la région (2.31) en $s = \beta$, on pose $\theta(\chi) := 1$ et $\beta_\chi := \beta$.

La quantité β_χ n'interviendra pas dans les calculs lorsque $\theta(\chi) = 0$. On note

$$S_s(y) := \sum_{n \leq y} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s}.$$

La majoration triviale $S_s(y) \ll y^{1-\sigma}/(1-\sigma)$ montre que l'on peut supposer $\varepsilon \geq 1/\log y$. D'autre part, sans perte de généralité on suppose que s n'est pas un zéro de $L(s, \chi)$ et est différent de 0.

On note $F(s, \chi) := L(s, \chi)(s - \beta_\chi)^{-\theta(\chi)}$ et on rappelle les faits suivants, énoncés dans [Dav00, chapitres 15 et 16] :

- F est une fonction entière de s dont les seuls zéros sont d'une part les zéros triviaux, qui sont des entiers négatifs ou nuls, et les zéros non triviaux, de parties réelles dans $[0, 1]$,
- le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de F avec $\beta \in [0, 1]$ et $|\gamma| \leq T$ vaut

$$\frac{T}{\pi}\log\left(\frac{qT}{2\pi}\right) - \frac{T}{\pi} + O(\log(qT)),$$

Enfin, si χ est non trivial et $\chi(-1) = 1$, on pose $\alpha(\chi) = 1$, et $\alpha(\chi) = 0$ dans tous les autres cas. Ainsi, $\alpha(\chi) = 1$ si et seulement si $L(0, \chi) = 0$. Une formule de Perron [Ten07, Corollaire II.2.4] ainsi que des estimations classiques concernant la densité verticale des zéros de $L(s, \chi)$ (voir par exemple [Dav00, chapitres 17 et 19]) fournissent

$$\begin{aligned} S_s(y) = & - \sum_{\substack{\rho \\ |\mathfrak{Im}(\rho)-\tau| \le H/2}} \frac{y^{\rho-s}}{\rho - s} - \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s} - 1}{\beta_\chi - s} + \alpha(\chi)\frac{y^{-s}}{s} - \frac{F'}{F}(s,\chi) \\ & + O\left(y^{-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{H}\right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

où ρ dans la première somme désigne un zéro non trivial de $F(s, \chi)$.

On suppose dans un premier temps $1 - \sigma \le \varepsilon/2$. Alors

$$S_s(y) + \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s} - 1}{\beta_\chi - s} \ll \sum_{\substack{\rho = \beta + i\gamma \\ |\gamma| \le H}} \frac{y^{\beta - \sigma}}{|\rho - s|} + \left|\frac{F'}{F}(s,\chi)\right| + 1 + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{H}. \tag{2.36}$$

On a

$$\frac{F'}{F}(s,\chi) \ll \left|\frac{F'}{F}(1+\varepsilon+i\tau,\chi)\right| + \varepsilon \max_{\sigma \le \kappa \le 1+\varepsilon}\left|\left(\frac{F'}{F}\right)'(\kappa + i\tau, \chi)\right|.$$

En dérivant une formule explicite pour $L'/L(s, \chi)$ (voir par exemple [Dav00, chapitre 12, formule (17)]), on obtient

$$\left(\frac{F'}{F}\right)'(\kappa + i\tau, \chi) = -\sum_{\rho} \frac{1}{(\kappa + i\tau - \rho)^2} - \sum_{\substack{m \in \mathbf{Z}, m \le 0 \\ L(m,\chi)=0}} \frac{1}{(\kappa + i\tau - m)^2} \tag{2.37}$$

où, dans la première somme, ρ désigne un zéro non trivial de $L(s, \chi)$, sauf éventuellement β_χ. On a $\kappa \gg 1$, la seconde somme est donc $O(1)$. Dans la première somme sur $\rho = \beta + i\gamma$,

– la contribution de ceux vérifiant $|\gamma| > H$ est

$$\ll \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| > H}} \frac{1}{|\gamma|^2} \ll \frac{\log(qH)}{H}$$

grâce par exemple à [Dav00, formules (1) des chapitre 15 et 16],

– la contribution de ceux vérifiant $|\gamma| \le H$ et $|\tau - \gamma| > 1$ est $O(\log(qH))$ grâce à [Dav00, formules (3) des chapitres 15 et 16],

– la contribution de ceux vérifiant $|\tau - \gamma| \le 1$ est

$$\le \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma - \tau| \le 1}} \frac{1}{|1 + \varepsilon + i\tau - \rho|^2} \le \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{Re}\left(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma - \tau| \le 1}} \frac{1}{1 + \varepsilon + i\tau - \rho}\right) \ll \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\log(qH)}{\varepsilon}$$

en suivant les mêmes calculs que Harper [Har12b, démonstration du lemma 3] et en notant que dans le cas $\theta(\chi) \ne 0$, on a $1/(1 + \varepsilon + i\tau - \beta_\chi) \ll 1/\varepsilon$.

On obtient donc $F'/F(s, \chi) \ll \varepsilon^{-1} + \log(qH)$. Il reste à majorer la somme sur ρ du membre de droite de (2.36). On utilise pour cela la majoration suivante, qui découle de [Hux74, formule (1.1)] et [Jut77, formule (1.8)],

$$\operatorname{card}\Big\{\rho = \beta + i\gamma \in \mathbf{C} \;\Big|\; \prod_{r \le q}\prod_{\chi' \pmod r} L(\rho, \chi') = 0, \beta \ge 1 - \delta, |\gamma| \le H\Big\} \ll (qH)^{c_3\delta} \tag{2.38}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, uniformément pour $\delta \in [0, 1/2]$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|\gamma|\leq H}} \frac{y^{\beta-\sigma}}{|\rho-s|} &\ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\\beta\leq 1/2,|\gamma|\leq H}} \frac{y^{1/2-\sigma}}{1+|\gamma-\tau|} + \sum_{k=1}^{\lfloor 1/(2\varepsilon)\rfloor} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\k\varepsilon\leq 1-\beta<(k+1)\varepsilon\\|\gamma|\leq H}} \frac{y^{1-\sigma-k\varepsilon}}{\varepsilon}\\ &\ll y^{1/2-\sigma}\log^2(qH) + \frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon}}{1-\sigma}\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_2 > 0$, quitte à supposer $c_1 > c_3$. Cela fournit la majoration annoncée dans le cas $1 - \sigma \leq \varepsilon/2$.

Dans le cas $1 - \sigma > \varepsilon/2$, on a par une intégration par parties

$$S_s(y) = S_s(\sqrt{y}) + S_{i\tau}(y)y^{-\sigma} - S_{i\tau}(\sqrt{y})y^{-\sigma/2} + \sigma \int_{\sqrt{y}}^{y} S_{i\tau}(t)t^{-\sigma-1}\mathrm{d}t. \tag{2.39}$$

Soit $t \in [\sqrt{y}, y]$; on a $t \geq (qH)^{c_1/2}$. Il est nécessaire de distinguer le cas $\theta(\chi) = 1$ car alors $F(1 - \beta_\chi, \chi) = 0$. On note donc

$$\mathbf{1}_{\theta=1} := \begin{cases} 1 & \text{si } \theta(\chi) = 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On suppose également sans perte de généralité que $\tau \neq 0$. Il découle de la formule (2.35) avec s et y remplacés respectivement par $i\tau$ et t que

$$\begin{aligned}&S_{i\tau}(t) + \theta(\chi)\frac{t^{\beta_\chi - i\tau}-1}{\beta_\chi - i\tau}\\ &\ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\\rho\neq 1-\beta_\chi\\|\gamma|\leq H}} \frac{t^\beta}{|\rho - i\tau|} + \left|\alpha(\chi)\frac{t^{-i\tau}}{i\tau} - \frac{F'}{F}(i\tau,\chi) - \mathbf{1}_{\theta=1}\frac{t^{1-\beta_\chi-i\tau}}{1-\beta_\chi-i\tau}\right| + 1 + \frac{t\log^2(qtH)}{H}\end{aligned} \tag{2.40}$$

où dans la somme sur ρ la condition $\rho \neq 1-\beta_\chi$ n'est à prendre en compte que lorsque $\theta(\chi) = 1$. D'après [MV06, formules (10.27), (12.9) et Theorem 11.4], on a

$$\begin{aligned}&\left|\alpha(\chi)\frac{t^{-i\tau}}{i\tau} - \frac{F'}{F}(i\tau,\chi) - \mathbf{1}_{\theta=1}\frac{t^{1-\beta_\chi-i\tau}}{1-\beta_\chi-i\tau}\right|\\ &\leq \left|\frac{L'}{L}(1-i\tau,\overline{\chi}) - \frac{\mathbf{1}_{\theta=1}}{1-i\tau-\beta_\chi}\right| + \left|\mathbf{1}_{\theta=1}\frac{t^{1-i\tau-\beta_\chi}-1}{1-i\tau-\beta_\chi}\right| + \left|\alpha(\chi)\frac{t^{-i\tau}-1}{i\tau}\right| + O(\log(qH))\\ &\ll \log(qyH) + \sqrt{t}\log t.\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $\rho = \beta + i\gamma$ zéro non trivial de $F(s,\chi)$, sauf éventuellement $1 - \beta_\chi$, on a $\beta \geq \varepsilon$, ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\\rho\neq 1-\beta_\chi\\|\gamma|\leq H}} \frac{t^\beta}{|\rho-i\tau|} &\ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|\gamma|\leq H\\\beta\leq 1/4}} \frac{t^{1/4}}{\varepsilon+|\gamma-\tau|} + \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|\gamma|\leq H\\1/4<\beta<1/2}} \frac{t^{1/2}}{1+|\gamma-\tau|} + \sum_{k=1}^{\lfloor 1/(2\varepsilon)\rfloor} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\|\gamma|\leq H\\k\varepsilon\leq 1-\beta<(k+1)\varepsilon}} t^{1-k\varepsilon}\\ &\ll \sqrt{t}\log^2(qH) + t\left(\frac{(qH)^{c_3}}{t}\right)^{\varepsilon} \ll t^{1-c_2\varepsilon}\end{aligned}$$

en supposant $c_1 > 2c_3$ et quitte à réduire la valeur de c_2, et où l'on a de nouveau utilisé des résultats classiques sur la densité des zéros de $L(s,\chi)$ [Dav00, formules (1) des chapitres 15 et 16]. On a donc

$$S_{i\tau}(t) + \theta(\chi)\frac{t^{\beta_\chi - i\tau} - 1}{\beta_\chi - i\tau} \ll t^{1-c_2\varepsilon} + \log(qyH) + \frac{t\log^2(qyH)}{H}$$

et ainsi, en reportant dans (2.39),

$$\begin{aligned} &S_s(y) + \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s} - 1}{\beta_\chi - s} \\ &\ll \left|\theta(\chi)\frac{y^{(\beta_\chi - s)/2} - 1}{\beta_\chi - s}\right| + \frac{y^{(1-\sigma)/2}}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon}}{1-\sigma-c_2\varepsilon} + y^{-\sigma/2}\log(qyH) + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{(1-\sigma)H}. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le premier terme est dominé par le deuxième. En utilisant l'inégalité $1-\sigma > \varepsilon/2$ et en observant que $y^{(1-\sigma)/2}/(1-\sigma) \gg \log y$, on obtient la majoration annoncée. □

Remarque 2.5. Ainsi qu'il est observé dans la remarque qui suit le lemme 2 de [Har12a], dans la démonstration qui précède, la majoration (2.38) en conjonction avec l'hypothèse $y \geq (qH)^{c_1}$, remplace avantageusement les résultats classiques sur la densité verticale des zéros des fonctions L [Dav00, chapitres 17 et 19]. L'utilisation de ceux-ci induirait un facteur supplémentaire $\log^2(qyH)$ dans le premier terme d'erreur de chacune des estimations (2.32), (2.33) et (2.34) et rendrait celles-ci triviales lorsque $\varepsilon = O((\log\log qyH)/\log y)$. Des valeurs permises pour ε dépendent le choix des paramètres ε et T dans les Propositions 2.6, 2.10 et 2.13 *infra*, qui influent sur le domaine de validité en Q ainsi que la qualité des termes d'erreur.

Lemme 2.6. *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ positives, c_2 pouvant être fixée arbitrairement petite, telles que pour tous réels x, y, T supérieurs à 4, $\varepsilon > 0$ et tout entier $q \geq 2$, sous les conditions :*

– $(\log x)^{c_1} \leq y \leq x$,
– $qT \leq y^{c_2}$,
– $\varepsilon \log y \geq 1/c_2$,
– $T \geq y^{c_1\varepsilon}(\log x)^2$,

et pour tout caractère χ de module q tel que la fonction $L(s,\chi)$ ne s'annule pas pour $\sigma \geq 1-\varepsilon$ et $|\tau| \leq 2T$, la majoration

$$\frac{L(\sigma + i\tau, \chi; y)}{L(\sigma' + i\tau, \chi; y)} \ll x^{(\sigma'-\sigma)/2}$$

soit valable lorsque $(\sigma, \sigma', |\tau|) \in [\alpha - c_2\varepsilon, \alpha]^2 \times [0, T]$ et $\sigma \leq \sigma'$.

En particulier, cette majoration est valable avec $\varepsilon = b/\log QT$ pour tout $Q \geq 2$ vérifiant $QT \leq y^{c_2}$, lorsque χ est un caractère de module $q \leq Q$ qui n'est pas Q-exceptionnel. De plus, elle est également valable lorsque χ est Q-exceptionnel et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$|\tau| \geq \max\{1, y^{\beta-\sigma}\} \qquad \textit{ou} \qquad \beta \leq 1 - \sqrt{c_2}/\log QT.$$

D'autre part, sous les conditions :

– $(\log x)^{c_1} \leq y \leq x$,

– $y^{c_1(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}}(\log x)^2 \leq T \leq y^{c_2}$,

la majoration

$$\frac{\zeta(\sigma+i\tau,y)}{\zeta(\alpha+i\tau,y)} \ll x^{(\alpha-\sigma)/2}$$

est valable lorsque $(\sigma,|\tau|) \in [\alpha - c_2(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3},\alpha] \times [y^{1-\alpha},T]$.

Démonstration. Afin d'unifier les calculs dans les différents cas, on se donne un caractère χ, qui est soit non principal et de module $q \geq 2$, soit le caractère trivial auquel cas l'on pose $q := 1$, et on note suivant les cas :

– si $\chi = \mathbf{1}$, on pose $\beta_\chi := 1$, $\sigma' = \alpha$ et $\varepsilon = b(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}$,

– si χ est un caractère Q-exceptionnel, on pose $\beta_\chi := \beta$ et $\varepsilon = b/\log QT$.

Ainsi $L(s,\chi)$ est une fonction qui n'a pas de zéro ni de pôle pour $\sigma \geq 1-\varepsilon$ et $|\tau| \leq 2T$, sauf éventuellement en $s = \beta_\chi$. Dans le cas $\chi = \mathbf{1}$, ceci découle de la région sans zéro de Vinogradov-Korobov [MV06, formule (6.24)] quitte à réduire la valeur de b. Quitte à choisir c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite on a $\sigma' \geq \sigma \geq 1/2$. On note χ^* le caractère primitif associé à χ et q^* son module ; on a pour tout $s \in \mathbf{C}$,

$$L(s,\chi;y) = \prod_{p|q}(1-\chi^*(p)p^{-s})L(s,\chi^*;y).$$

Lorsque $q = 1$ et $\chi = \mathbf{1}$, le produit sur p est vide, et dans les autres cas, sa dérivée logarithmique par rapport à s est $\ll \sum_{p|q}(\log p)/(1-p^{-\mathfrak{Re}(s)}) \ll \log q$ lorsque $\mathfrak{Re}(s) \geq 1/2$. On a donc dans tous les cas

$$\frac{L(\sigma+i\tau,\chi;y)}{L(\sigma'+i\tau,\chi;y)} = \exp\left\{-\int_\sigma^{\sigma'}\frac{L'}{L}(\kappa+i\tau,\chi^*;y)\mathrm{d}\kappa + O(1)\right\}$$

avec, pour tout $\kappa \in [\sigma,\sigma']$,

$$-\frac{L'}{L}(\kappa+i\tau,\chi^*;y) = \sum_{P(n)\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} = \sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} + O(1).$$

Le Lemme 2.5 s'applique avec $H = 2T$. Lorsque χ est non exceptionnel, le Lemme 2.5 fournit

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} &\ll \frac{y^{1-\kappa-c_3\varepsilon}}{1-\kappa} + \frac{y^{1-\kappa}\log^2(qyT)}{(1-\kappa)T} + \log(qT)\\ &\ll \frac{y^{1-\alpha-c_3\varepsilon/2}}{1-\alpha} + \log(qT)\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, quitte à supposer c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite. Si χ est exceptionnel ou $\chi = \mathbf{1}$, on a

$$\sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} \ll \frac{y^{1-\alpha-c_3\varepsilon/2}}{1-\alpha} + \log(qT) + \left|\frac{y^{\beta_\chi-\kappa-i\tau}-1}{\beta_\chi-\kappa-i\tau}\right|$$

Lorsque $|\tau| \geq y^{\beta_\chi-\sigma}$, le dernier terme du membre de droite est borné, tandis que lorsque χ est Q-exceptionnel et $\beta \leq 1-\sqrt{c_2}/\log QT$, ce terme est $O(y^{1-\kappa-\sqrt{c_2}\varepsilon/b}/(1-\kappa))$.

Ainsi dans tous les cas, quitte à réduire la valeur de c_2, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} &\ll \frac{y^{1-\alpha-\sqrt{c_2}\varepsilon/b}}{1-\alpha}+\log(QT)\\ &\ll \begin{cases}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{c_2}\varepsilon\log y/b}+\frac{\log(QT)}{\log x}\right)\log x & \text{si } \chi\neq \mathbf{1}\\ \left(\mathrm{e}^{-c_2^{-1/6}(\log y)^{1/3}/(\log\log y)^{1/3}}+\frac{\log(QT)}{\log x}\right)\log x & \text{si } \chi=\mathbf{1}\end{cases}\end{aligned}$$

grâce à [Ten07, formule (III.5.74)]. Quitte à supposer c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite, on en déduit

$$\left|\sum_{P(n)\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}}\right|\leq\frac{\log x}{2}+O(1)$$

donc $L(\sigma+i\tau,\chi;y)/L(\sigma'+i\tau,\chi;y)=O(x^{(\sigma'-\sigma)/2})$. □

Le lemme suivant traite de la situation où le zéro exceptionnel existe. La démonstration est analogue à celle de [Ten90, lemme 1].

Lemme 2.7. *Il existe des constantes c_1, c_2 strictement positives telles que pour tous réels Q, T supérieurs à 2 et x et y assez grands avec :*

- $(\log x)^{c_1}\leq y\leq x$,
- $QT\leq y^{c_2/(\log\log\log x)}$,
- $T\geq y^{c_1/\log(QT)}(\log x)^2$,

si le zéro exceptionnel β existe et vérifie $1-\beta\leq\sqrt{c_2}/\log QT$, alors pour tout τ avec $|\tau|\leq T/2$ on ait

$$L(\alpha+i\tau+\beta-1,\chi_1;y)\ll\zeta(\alpha,y)H(u)^{-\delta}.$$

Démonstration. Quitte à choisir c_1 suffisamment grande, on suppose $\alpha\geq 2/3$. Alors on a

$$\begin{aligned}L(\alpha+i\tau+\beta-1,\chi_1;y)&=\zeta(\alpha,y)\exp\left\{\sum_{p\leq y}\log\left(\frac{1-p^{-\alpha}}{1-\chi_1(p)p^{1-\beta-\alpha-i\tau}}\right)\right\}\\&=\zeta(\alpha,y)\exp\left\{-\sum_{p\leq y}\frac{1-\chi_1(p)p^{1-\beta-i\tau}}{p^\alpha}+O(1)\right\}\end{aligned}$$

le logarithme étant pris en détermination principale. La somme sur p vérifie la minoration

$$\sum_{p\leq y}\frac{1-\chi_1(p)p^{1-\beta}\cos(\tau\log p)}{p^\alpha}\geq O(1)+\frac{1}{\log y}\sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)(1-\chi_1(n)n^{1-\beta}\cos(\tau\log n))}{n^\alpha}.$$

Le Lemme 2.5 appliqué deux fois avec $\varepsilon=b/\log QT$, $H=2T$ et $s\in\{\alpha,\alpha+\beta-1\}$ fournit pour une certaine constante $c_3>0$

$$\sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)}{n^\alpha}=\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}+O\left(\frac{y^{1-\alpha-c_3\varepsilon}}{1-\alpha}+\frac{y^{1-\alpha}\log^2(QyT)}{(1-\alpha)T}+\log(QT)\right)$$

$$\sum_{n\leq y}\frac{\Lambda(n)\chi_1(n)}{n^{\alpha+i\tau+\beta-1}}=-\frac{y^{1-\alpha-i\tau}}{1-\alpha-i\tau}+O\left(\frac{y^{2-\alpha-\beta-c_3\varepsilon}}{2-\alpha-\beta}+\frac{y^{2-\alpha-\beta}\log^2(QyT)}{(2-\alpha-\beta)T}+\log(QT)\right).$$

Quitte à choisir c_1 suffisament grande, dans les termes d'erreur, le deuxième terme est dominé par le premier. On a

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{y^{1-\alpha-i\tau}}{1-\alpha-i\tau}\right\}\gg\frac{\log x}{(\log(u+1))^2}$$

grâce aux calculs de Hildebrand et Tenenbaum [HT86, Lemma 8]. D'autre part, quitte à supposer c_2 suffisament petite, on a $1-\beta\leq c_3\varepsilon/2$, or $y^{-c_3\varepsilon/2}\leq(\log\log x)^{-c_3b/(2c_2)}$ et $\log(QT)\ll\log x/(u\log\log\log x)$, ainsi pour un certain $\delta>0$ et x et y assez grands, quitte à choisir c_2 suffisamment petite on obtient

$$L(\alpha+i\tau+\beta-1,\chi_1;y)\ll\zeta(\alpha,y)\exp\left\{-\delta\frac{u}{(\log(u+1))^2}\right\}$$

qui est la majoration annoncée. □

2.2.4 Caractères non principaux, non exceptionnels

On s'intéresse au cas des caractères non principaux et non associés à l'éventuel caractère exceptionnel χ_1. Soit χ un tel caractère, de module q. On rappelle que $\Psi_0(z,y;\chi,\gamma)$ est la fonction définie par (2.25).

Proposition 2.6. *Il existe des constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que pour tous réels x,y,γ,ε et T avec $4\leq T\leq y^{c_2}$ et $\varepsilon>0$, lorsque q et un entier avec $2\leq q\leq y^{c_2}$ et χ un caractère de module q, non principal et tel que la fonction $L(s,\chi)$ ne s'annule pas dans la région*

$$\{s\in\mathbf{C}\mid\sigma>1-\varepsilon,|\tau|\leq T\}$$

et lorsque $2\leq(\log x)^{c_1}\leq y\leq x$, et $z\in[x^{2/3},x]$ on ait

$$\Psi_0(z,y;\chi,\gamma)\ll z^{\alpha}\zeta(\alpha,y)(1+|\gamma|z)\left((\log T)x^{-c_2\varepsilon}+T^{-c_2}\right).$$

En particulier, pour tout Q avec $2\leq Q\leq y^{c_2}$, ceci est valable pour touts les caractères de module inférieurs à Q qui sont non principaux et non Q-exceptionnels, avec $\varepsilon=b/\log QT$. De plus la même majoration est valable lorsque χ est Q-exceptionnel mais $\beta\leq 1-\sqrt{c_2}/\log QT$.

Remarque 2.7. Lorsque $\gamma=0$, ce résultat est un cas particulier de [Har12a, theorem 3].

Démonstration. La condition sur (x,y) assure que les hypothèses du Lemme 2.1 sont vérifiées pour la suite $a_n=\mathrm{e}(n\gamma)\chi(n)$ avec M absolu. On a de plus $\alpha\geq 1/2$ quitte à supposer c_1 assez grande. Le choix $\kappa=\alpha(x,y)$ fournit pour une certaine constante $c_3>0$

$$\Psi_0(z,y;\chi,\gamma)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}L(s,\chi;y)z^s\check{\Phi}_0(\gamma z,s)\mathrm{d}s+O(z^{\alpha}\zeta(\alpha,y)(1+|\gamma|z)T^{-c_3}).$$

On modifie le contour pour intégrer sur la ligne brisée passant par les points

$$\alpha-iT,\quad\alpha-c_4\varepsilon-iT,\quad\alpha-c_4\varepsilon+iT,\quad\alpha+iT$$

où c_4 est une constante absolue choisie plus petite que la constante c_2 du Lemme 2.6. Soit I_1 la contribution des deux segments horizontaux et I_2 la contribution du segment vertical. Les Lemmes 2.3 et 2.6 s'appliquent ici dans tous les cas envisagés dans l'énoncé. On a ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &\ll z^{\alpha}\zeta(\alpha, y)\frac{(1+|\gamma|z)}{T}\int_0^{c_4\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{x}}{z}\right)^{\kappa}\mathrm{d}\kappa \\ &\ll z^{\alpha}\zeta(\alpha, y)\frac{(1+|\gamma|z)}{T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\ll z^{\alpha}\zeta(\alpha, y)(1+|\gamma|z)(\log T)\left(\frac{\sqrt{x}}{z}\right)^{c_4\varepsilon} \\ &\ll z^{\alpha}\zeta(\alpha, y)(1+|\gamma|z)(\log T)x^{-c_4\varepsilon/6}. \end{aligned}$$

On obtient la majoration annoncée en regroupant ces deux estimations. □

Dans la somme du membre de droite de (2.24), la contribution des caractères principaux s'écrit, après interversion des sommes,

$$V(x, y; q, \eta) := \sum_{n\in S(x,y)}\frac{\mu(q/(q,n))}{\varphi(q/(q,n))}\mathrm{e}(n\eta)$$

et celle, lorsque $\nu(q) = 1$, des caractères associés à χ_1 s'écrit $\chi_1(a)W(x, y; q, \eta)$ où

$$W(x, y; q, \eta) := \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\sum_{r|q/q_1}\frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\varphi(r)}\sum_{m\in S(xq_1r/q,y)}\mathrm{e}\left(\frac{mq}{q_1 r}\eta\right)\chi_r(m).$$

On rappelle que T_1 est défini en (2.10).

Proposition 2.8. *Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que pour tous réels x, y et ϑ et tous entiers $q, Q \geq 1$, lorsque $(\log x)^{c_1} \leq y \leq x$, $q \leq y^{c_2}$, $Q \leq T_1^{c_2}$ et $\vartheta = a/q + \eta$ avec $(a, q) = 1$, on ait*

$$\begin{aligned} E(x, y; \vartheta) = V(x, y; q, \eta) &+ \nu(q)\chi_1(a)W(x, y; q, \eta) \\ &+ O\left(\Psi(x, y)(1+|\eta|x)\left(y^{-c_2} + Q^{-c_2}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.41}$$

où χ_1 désigne le caractère primitif Q-exceptionnel.

Démonstration. La preuve que l'on propose ici reprend la structure des calculs de la section 3.3 de [Har12a]. Les caractères de modules inférieurs à Q sont traités grâce à la Proposition 2.6. Pour les caractères de modules supérieurs, lorsque la fonction L a ses zéros de petite partie réelle, la Proposition 2.6 permet encore de conclure. Cela ne concerne pas tous les caractères de modules supérieurs à Q, mais la majoration de Huxley et Jutila (2.38) permet de dire que les caractères restants sont en proportion suffisament peu nombreux pour que leur contribution, même majorée trivialement, soit bien contrôlée.

Soient c_1' et c_2' les constantes de la Proposition 2.6. On suppose $c_1 \geq c_1'$ et $c_2 \leq c_2'$. Il s'agit de majorer

$$\sum_{d|q}\frac{1}{\varphi(q/d)}\sideset{}{'}\sum_{\chi \pmod{q/d}}\chi(a)\tau(\overline{\chi})\Psi_0(x/d, y; \chi, \eta d) \tag{2.42}$$

où la somme $\sum'$ porte sur les caractères non principaux et non Q-exceptionnels. Lorsqu'un tel caractère est lui-même de module $q/d \leq Q$, la Proposition 2.6 s'applique avec $z = x/d$ et $\gamma = \eta d$, $T = T_1$ et $\varepsilon = b/\log QT$ et fournit

$$\Psi_0(x/d, y; \chi, \eta d) \ll x^\alpha \zeta(\alpha, y) d^{-\alpha}(1 + |\eta|x) \left(y^{-c_3} + \mathcal{L}^{-c_3} + (\log x)^{1/2} x^{-c_3/\log Q}\right)$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$. On sépare la somme sur d dans (2.42) selon si $q/d \leq Q$ ou pas. La contribution des $d|q$ avec $d \geq q/Q$ est certainement

$$\begin{aligned}&\ll \Psi(x, y)(\log x)(1 + |\eta|x) \left(y^{-c_3} + \mathcal{L}^{-c_3} + (\log x)^{1/2} x^{-c_3/\log Q}\right) \sum_{r|q,\ r\leq Q} \sqrt{r}(q/r)^{-\alpha} \\ &\ll \Psi(x, y)(1 + |\eta|x) \left(y^{-c_2} + \mathcal{L}^{-c_2}\right)\end{aligned}$$

en majorant trivialement la somme sur r par $O\big(\min\{q, Q\}^{3/2}\big)$, quitte à réduire la valeur de c_2 et augmenter la valeur de c_1 afin d'avoir $\alpha \geq 2/3$ et pour absorber le facteur $\log x$. La dernière inégalité fait usage de l'hypothèse $Q \leq T_1^{c_2}$, quitte à supposer $c_2 < 1$.

Il reste à majorer la contribution à l'expression (2.42) des $d|q$ avec $d < q/Q$, autrement dit des caractères de modules $r|q$ avec $Q < r \leq y^{c_2}$. Soit χ un tel caractère et c_3' la constante apparaissant en exposant dans la formule (2.38). On pose $c_3 = 2/c_2'$ et $c_4 = 1/(10(c_3 + 1)c_3')$. Quitte à diminuer la valeur de c_2, on a $r^{c_3} \leq y^{c_2'}$. Lorsque $L(s, \chi)$ ne s'annule pas pour $\sigma \geq 1 - c_4$ et $|\tau| \leq r^{c_3}$, on a pour $(\log x)^{c_1} \leq y \leq x$ et $d|q$ la majoration

$$\Psi_0(x/d, y; \chi, \eta d) \ll \Psi(x, y)(1 + |\eta|x)(x^{-c_2' c_4/2} + (\log x) r^{-2}).$$

La contribution de tous ces caractères à la somme 2.42 est donc

$$\ll \Psi(x, y)(1 + |\eta|x)(x^{-c_2} + (\log x) Q^{-1/2}).$$

Pour tout $r \geq 2$, notons N_r le nombre de caractères de module r tel que la fonction $L(s, \chi)$ s'annule au moins une fois pour $\sigma \geq 1 - c_4$ et $|\tau| \leq r^{c_3}$. La majoration (2.38) fournit $\sum_{r\leq R} N_r \ll R^{1/10}$. Pour un tel caractère, on a $\tau(\overline{\chi})/\varphi(r) \ll r^{-1/3}$. La majoration triviale $|\Psi(x/d, y; \chi, \eta d)| \leq \Psi(x, y)$ montre que la contribution de tous ces caractères à la somme (2.42) est

$$\ll \Psi(x, y) \sum_{Q<r\leq y^{c_2}} \frac{N_r}{r^{1/3}} \ll \Psi(x, y)(Q^{-c_2/5} + y^{-c_2/5})$$

ce qui fournit la conclusion souhaitée.

□

Remarque 2.9. Il est possible de montrer que cette estimation est valable pour $q \leq x^{c_2}$, *cf.* [Har12a, Lemma 2]. Cela n'a cependant pas d'utilité pour les applications que l'on envisage ici.

2.2.5 Caractères principaux par la méthode du col

On note pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 0$ et tout entier q qui est y-friable

$$\zeta(s, q; y) := \sum_{P(n)\leq y} \frac{\mu(q/(n, q))}{\varphi(q/(n, q))} n^{-s} = \frac{q^{1-s}}{\varphi(q)} \prod_{p|q} \left(1 - p^{s-1}\right) \zeta(s, y).$$

Pour $\sigma \leq 1$, le facteur devant $\zeta(s, y)$ est $\ll 2^{\omega(q)} q^{1-\sigma}/\varphi(q)$. On montre une première estimation de $V(x, y; q, \eta)$ par la méthode du col. Par rapport à celle de la Proposition 2.12, qui sera montrée dans la section suivante, elle a l'avantage d'être valide sous des conditions moins restrictives sur q et η, au détriment du terme d'erreur.

Proposition 2.10. *Il existe des constantes c_1 et c_2 positives telles que pour tout (x, y) avec $(\log x)^{c_1} \leq y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, tout entier $q \in S(x^{1/4}, y)$ et tout $\eta \in \mathbf{R}$ vérifiant $|\eta|x \leq x^{1/4}$, on ait*

$$\begin{aligned}V(x, y; q, \eta) = \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \prod_{p|q} \left(1 - p^{\alpha-1}\right) \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha)\Psi(x, y) \\ + O\left(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha}\Psi(x, y)}{\varphi(q)(1 + |\eta|x)^\alpha} \frac{(\log q)^2 \log(2 + |\eta|x)^3}{u}\right) \\ + O\left(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha}\Psi(x, y)}{\varphi(q)}(1 + |\eta|x)\left(y^{-c_2} + \mathrm{e}^{-c_2(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}}\right)\right).\end{aligned} \tag{2.43}$$

Remarque 2.11. En particulier, lorsque $|\eta|x \leq \min\{y^{c_2/2}, \mathrm{e}^{c_2(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}/2}\}$, on a

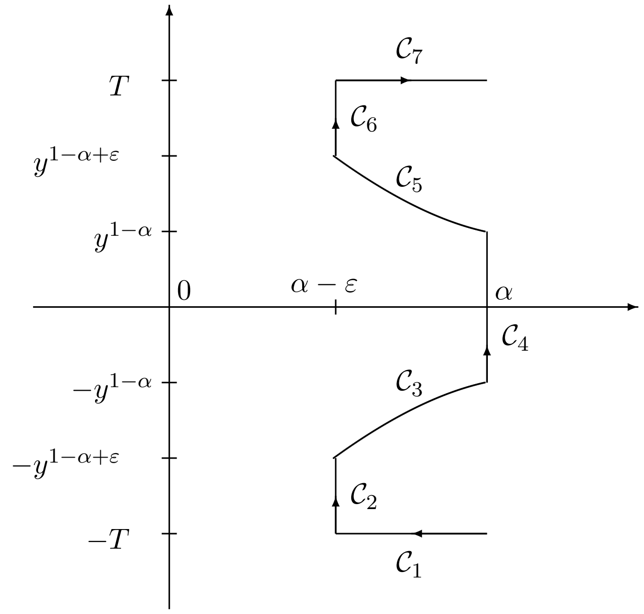
$$V(x, y; q, \eta) \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha}\Psi(x, y)(\log q)^2(\log(2 + |\eta|x))^3}{\varphi(q)(1 + |\eta|x)^\alpha}. \tag{2.44}$$

Démonstration de la Proposition 2.10. Soit T un réel supérieur à 4. La série de Dirichlet $\zeta(s, q; y)$ est absolument convergente pour $\sigma > 0$, donc les Lemmes 2.4 (avec $q_1 = 1$) et 2.1 s'appliquent et fournissent

$$\begin{aligned}V(x, y; q, \eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \zeta(s, q; y) x^s \check{\Phi}_0(\eta x, s) \mathrm{d}s \\ + O\left(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha}\Psi(x, y)}{\varphi(q)} \frac{(1 + |\eta|x) \log x \log T}{T^{\alpha/2}}\right).\end{aligned} \tag{2.45}$$

On note $\varepsilon := c_3(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}$ pour un certain réel $c_3 > 0$ fixé plus petit que la constante c_2 du Lemme 2.6, et on choisit $T = \min\{y^{c_2}, \mathrm{e}^{(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5})}\}$. Alors les hypothèses du Lemme 2.6 sont satisfaites quitte à choisir c_1 assez grande et c_2 assez petite. D'autre part, quitte à augmenter la valeur de c_1 et diminuer celle de c_2, on suppose que $\alpha - c_2\varepsilon \geq 1/2$. On intègre suivant le chemin $\cup_{i=1}^7 \mathcal{C}_j$, où

1. $\mathcal{C}_1$ est le segment $[\alpha - iT, \alpha - \varepsilon - iT]$,
2. $\mathcal{C}_2$ est le segment $[\alpha - \varepsilon - iT, \alpha - \varepsilon - iy^{1-\alpha+\varepsilon}]$,
3. $\mathcal{C}_3$ est le chemin reliant le point $\alpha - \varepsilon - iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ au point $\alpha - iy^{1-\alpha}$ en suivant la courbe $\tau = y^{1-\sigma}$,
4. $\mathcal{C}_4$ est le segment $[\alpha - iy^{1-\alpha}, \alpha + iy^{1-\alpha}]$,
5. $\mathcal{C}_5$ est le chemin reliant le point $\alpha + iy^{1-\alpha}$ au point $\alpha - \varepsilon + iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ en suivant la courbe $\tau = -y^{1-\sigma}$,
6. $\mathcal{C}_6$ est le segment $[\alpha - \varepsilon + iy^{1-\alpha+\varepsilon}, \alpha - \varepsilon + iT]$,
7. $\mathcal{C}_7$ est le segment $[\alpha - \varepsilon + iT, \alpha + iT]$.



Pour $j \in \{1, \cdots, 7\}$ on note I_j la contribution du chemin $\mathcal{C}_j$:

$$I_j = I_j(\eta) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_j} \zeta(s, q; y) x^s \check{\Phi}_0(\eta x, s) \mathrm{d}s.$$

La contribution du segment $\mathcal{C}_7$ est, grâce aux Lemmes 2.6 et 2.3,

$$I_7 \ll \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\sigma}}{\varphi(q)} \zeta(\alpha, y) x^\sigma \frac{1 + |\eta| x}{T} \mathrm{d}\sigma \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q)} \frac{(1 + |\eta| x) \log x}{T}.$$

Sur le segment $\mathcal{C}_6$ on a $|\tau| \geq y^{1-\sigma}$. Le Lemme 2.6 est donc encore applicable et on a

$$I_6 \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha+\varepsilon}}{\varphi(q)} x^{\alpha-\varepsilon/2} \zeta(\alpha, y)(1 + |\eta| x) \log T \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q)} \frac{(1 + |\eta| x) \log T \log x}{x^{\varepsilon/4}}.$$

Sur le segment $\mathcal{C}_5$, le traitement est analogue. On a

$$I_5 \ll \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} q^{1-\sigma} |\zeta(\sigma + iy^{1-\sigma}, y) \check{\Phi}_0(\eta x, \sigma + iy^{1-\sigma})| (\log y) x^\sigma y^{1-\sigma} \mathrm{d}\sigma.$$

Pour tout $\kappa \in [0, \varepsilon]$, on a pour un certain $\delta > 0$

$$\zeta(\alpha - \kappa + iy^{1-\alpha+\kappa}, y) \ll \zeta(\alpha, y) H(u)^{-\delta}$$

$$\check{\Phi}_0(\eta x, \alpha - \kappa + iy^{1-\alpha+\kappa}) \ll y^{1-\alpha+\kappa} \log(2 + |\eta| x)/(1 + |\eta| x)^{\alpha-\kappa}$$

où la première inégalité est conséquence du Lemme 2.6 et de [HT86, lemma 8]. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} I_5 &\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} x^\alpha \zeta(\alpha, y)(\log x)(\log y) y^{2(1-\alpha)}}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha H(u)^\delta} \int_0^\varepsilon \left(\frac{y^2 q(1 + |\eta| x)}{x} \right)^\kappa \mathrm{d}\kappa \\ &\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{(1 + |\eta| x)^\alpha \varphi(q) H(u)^{\delta/2}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $(\log x)(\log y)y^{2(1-\alpha)} \ll H(u)^{\delta/2}$ qui découle de nos hypothèses sur (x, y).

Sur le segment $\mathcal{C}_4$, le traitement est identique à celui des segments $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ dans la preuve de la proposition 3.5 de [Dra13]. On reprend ici les étapes principales. La contribution des s vérifiant $1/\log y \leq |\tau| \leq y^{1-\alpha}$ est

$$\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} x^\alpha}{\varphi(q)} \int_{1/\log y}^{y^{1-\alpha}} |\zeta(\alpha + i\tau) \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha + i\tau)| \mathrm{d}\tau \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha H(u)^{\delta/2}}$$

où l'on a utilisé les Lemmes 2.3 et [HT86, lemma 8]. On pose $T_0 := u^{-1/3}(\log y)^{-1}$. La contribution à I_4 des s vérifiant $T_0 \leq |\tau| \leq 1/\log y$ est

$$\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \log(2 + |\eta| x)}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha} \int_{T_0}^{1/\log y} |\zeta(\alpha + i\tau)| x^\alpha \mathrm{d}\tau \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y) \log(2 + |\eta| x)}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha u}$$

où l'on a utilisé les calculs de la démontration du Lemma 11 de [HT86] pour évaluer l'intégrale. Lorsque $|\tau| \leq T_0$, et quitte à changer la valeur de c_1 afin d'avoir $\alpha \geq 1/2$, on a pour $s = \alpha + i\tau$ l'estimation

$$\int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)(\log t)^k t^{s-1} \mathrm{d}t \ll_k \frac{\log(2 + |\lambda|)^{k+1}}{(1 + |\lambda|)^\alpha} \qquad (k \in \{0, 1, 2\}.)$$

Cela se montre par en intégrant par partie de façon similaire aux calculs du Lemme 2.3. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{s q^{1-s}}{\varphi(q)} \prod_{p \mid q} \left(1 - p^{s-1}\right) \check{\Phi}_0(\eta x, s) = & \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \prod_{p \mid q} \left(1 - p^{\alpha-1}\right) \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \\ & + \lambda\tau + O\left(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} (\log q)^2 (\log(2 + |\eta| x))^3}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha} \tau^2\right) \end{aligned}$$

où le coefficient λ dépend au plus de x, y, q et η et vérifie

$$\lambda \ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \log q (\log(2 + |\eta| x))^2}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha}.$$

Le reste des calculs sont identiques à ceux de [Dra13, proposition 3.5] : en reportant ce développement dans l'intégrale puis en développant le terme complémentaire $x^s \zeta(s, y)/s$ de la même façon que dans [HT86, lemma 11], on obtient finalement

$$I_4 = \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \prod_{p \mid q} \left(1 - p^{\alpha-1}\right) \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \Psi(x, y) + O\left(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\varphi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha} \frac{(\log q)^2 (\log(2 + |\eta| x))^3}{u}\right).$$

Pour $j \in \{1, 2, 3\}$ on a $I_j(\eta) = \overline{I_{8-j}(-\eta)}$ et on se ramène aux calculs précédents. L'estimation voulue suit en regroupant toutes les contributions puisque l'on a toujours $\varepsilon \log x \gg \log T$.

□

2.2.6 Caractères principaux par la transformée de Laplace

Une autre façon d'évaluer $V(x, y; q, \eta)$ consiste à utiliser une estimation de De Bruijn [dB51] précisée par Saias [Sai89] et utilisée dans [dlBG12]. On rappelle la définition (2.6).

Proposition 2.12. *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, lorsque $(x,y) \in (H_\varepsilon)$ avec $y \le \sqrt{x}$, et $q \in \mathbf{N}$ et $\eta \in \mathbf{R}$ avec $q \le \mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta| \le \mathcal{Y}_\varepsilon/x$, on a*

$$V(x,y;q,\eta) = \widetilde{V}(x,y;q,\eta) + O_\varepsilon\left(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_\varepsilon}\right).$$

Démonstration. Cette proposition généralise des calculs faits dans [dlBG12, théorème 4.2]. La différence vient du fait que l'on calcule uniquement la contribution des caractères principaux, pour lesquels on dispose de la région sans zéro de ζ de Vinogradov-Korobov, plus étendue que la région de Siegel-Walfisz pour les fonctions L. Notons $Q := x/\mathcal{Y}_\varepsilon$. Les mêmes calculs que [dlBG12, lemme 3.2] montrent que

$$\begin{aligned} V(x,y;q,\eta) &= \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \sum_{m\in S(x/k,y)} \mathrm{e}(mk\eta) \\ &= \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \int_Q^x \mathrm{e}(t\eta)\mathrm{d}\{\Psi(t/k,y)\} + O_\varepsilon\left(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'estimation (2.23) et le fait que $\mathcal{Y}_\varepsilon^{2\alpha-1} \gg_\varepsilon \mathcal{Y}_{2\varepsilon}$ sous notre hypothèse sur (x,y). L'estimation (2.5) fournit, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &\int_Q^x \mathrm{e}(t\eta)\mathrm{d}\{\Psi(t/k,y)\} - \int_Q^x \mathrm{e}(t\eta)\mathrm{d}\{\Lambda(t/k,y)\} \\ &\qquad = \int_Q^x \mathrm{e}(t\eta)\mathrm{d}\{O(\Psi(t/k,y)\mathcal{Y}_{\varepsilon/2}^{-1}\} \\ &\qquad \ll (1+|\eta|x)\frac{\Psi(x/k,y)}{\mathcal{Y}_{\varepsilon/2}} \ll_\varepsilon \frac{\Psi(x/k,y)}{\mathcal{Y}_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Notant $V_q(x,y) := \sum_{k|q} \mu(q/k)k/\varphi(q)\Lambda(x/k,y)$, on en déduit

$$V(x,y;q,\eta) = \int_Q^x \mathrm{e}(t\eta)\mathrm{d}V_q(t,y) + O_\varepsilon\left(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right).$$

En utilisant (2.7), on réécrit cela sous la forme

$$V(x,y;q,\eta) = \sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\left\{\int_{Q/k}^{x/k} \mathrm{e}(kt\eta)\lambda(t,y)\mathrm{d}t + \int_{Q/k}^{x/k} \mathrm{e}(kt\eta)t\mathrm{d}\Big(\frac{\{t\}}{t}\Big)\right\} + O\left(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right).$$

En intégrant par parties, on a d'une part

$$\sum_{k|q} \frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)} \int_{Q/k}^{x/k} \mathrm{e}(kt\eta)t\mathrm{d}\Big(\frac{\{t\}}{t}\Big) \ll \frac{2^{\omega(q)}q\mathcal{Y}_\varepsilon}{\varphi(q)} \ll \frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_\varepsilon},$$

et d'autre part, en utilisant $\int_0^t \mathrm{e}(v\eta)\mathrm{d}v = E(t,t;\eta) + O(1)$,

$$\int_{Q/k}^{x/k} \mathrm{e}(kt\eta)\lambda(t,y)\mathrm{d}t = E\Big(\frac{x}{k},\frac{x}{k};k\eta\Big)\lambda\Big(\frac{x}{k},y\Big) - \int_{Q/k}^{x/k} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\mathrm{d}t + O\left(yu + \Psi(Q/k,y)\right).$$

Les hypothèses faites sur x et y assurent que $yu\mathcal{Y}_0 \ll \Psi(x,y)$ et $\mathcal{Y}_\varepsilon^{2\alpha-1} \gg \mathcal{Y}_{2\varepsilon}$, le terme d'erreur est donc $O(\Psi(x,y)/(k\mathcal{Y}_{2\varepsilon}))$. On a de plus la majoration

$$\lambda'(t,y) \ll \frac{\Psi(t,y)\log(u+1)}{t^2\log y} \qquad (y \le t \le x). \tag{2.46}$$

qui se déduit par différentiation de [dlBG12, formule (2.2)] en utilisant par exemple l'estimation [dlB99, formule (30)]. Cela implique

$$\int_1^{Q/k} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\mathrm{d}t \ll \Psi(x/\mathcal{Y}_{\varepsilon/4},y)\log x + \frac{\Psi(x/(k\mathcal{Y}_{\varepsilon}),y)}{x/\mathcal{Y}_{\varepsilon/4}}$$

en séparant l'intégrale en $x/\mathcal{Y}_{\varepsilon/4}$. Les hypothèses sur x et y impliquent alors que chacun de ces termes est $\ll \Psi(x,y)/(k\mathcal{Y}_{2\varepsilon})$. On a enfin

$$\begin{aligned} & E(x/k,x/k;k\eta)\lambda(x/k,y) - \int_1^{x/k} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\mathrm{d}t \\ = & \sum_{n\le x/k} \mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + \frac{y}{\log y}\sum_{y<n\le x/k}\left(\frac{\{x/(ky)\}}{x/k} - \frac{\{n/y\}}{n}\right) \qquad (2.47) \\ = & \sum_{n\le x/k} \mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + O(yu). \end{aligned}$$

De même que précédemment, le terme d'erreur est $O(\Psi(x,y)/(k\mathcal{Y}_{2\varepsilon}))$. On obtient donc

$$\begin{aligned} V(x,y;q,\eta) &= \sum_{k\mid q}\frac{\mu(q/k)k}{\varphi(q)}\sum_{n\le x/k}\mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + O\left(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right) \\ &= \widetilde{V}(x,y;q,\eta) + O\left(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\varphi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

qui est l'estimation voulue, ε pouvant être pris arbitrairement petit.

□

2.2.7 Caractères exceptionnels

Soit Q un entier supérieur à 2. On se place dans le cas de l'existence du zéro de Siegel. Soit $q\le Q$ avec $\nu(q)=1$ et $P(q)\le y$. On définit

$$\begin{aligned} LW(s,q;y) &:= \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)}\sum_{r\mid(q/q_1)}\frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\varphi(r)}\left(\frac{q_1 r}{q}\right)^s L(s,\chi_r;y) \\ &= \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-s}\frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q)}\prod_{\substack{p\mid q/q_1\\ p\nmid q_1}}\Big(1-\chi_1(p)p^{s-1}\Big)L(s,\chi_1;y). \end{aligned}$$

Pour $\sigma\le 1$, le facteur devant $L(s,\chi_1;y)$ est $\ll (q/q_1)^{1-\sigma}2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}/\varphi(q)$.

Proposition 2.13. *Il existe des constantes c_1 et c_2 positives telles que pour tout (x,y) avec $(\log x)^{c_1}\le y\le \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, tout $Q\le y^{c_2/\log\log\log x}$, tout caractère χ de module $q\le Q$, qui est Q-exceptionnel, et tout $\eta\in\mathbf{R}$ vérifiant $|\eta|x\le x^{1/4}$, la quantité $W(x,y;q,\eta)$ soit un grand O de*

$$\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}\Psi(x,y)}{\varphi(q)}\left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}x^{1-\beta}H(u)^{\delta}} + (1+|\eta|x)R(x,y,Q)\right) \qquad (2.48)$$

où $R(x,y,Q) = y^{-c_2/\log\log\log x} + \mathcal{L}^{-c_2} + (\log x)^{3/2}x^{-c_2/\log Q}$.

Remarque 2.14. La contrainte sur Q n'est pas limitante dans les applications que l'on envisage. L'approche adoptée dans [Sou08, Lemma 5.2], permet d'obtenir une majoration moins forte mais qui est valable lorsque Q est de l'ordre d'une petite puissance de y. Cela n'est pas étudié ici.

Démonstration. On pose $T := \min\{y^{c_2/\log\log\log x}, \mathcal{L}\}$ et $\varepsilon = c_3/\log QT$, c_2 étant choisie suffisamment petite pour que les hypothèses du Lemme 2.7 vis-à-vis de T et Q soient vérifiées, et c_3 étant choisie plus petite que la constante c_2 du Lemme 2.7. Lorsque $\beta \leq 1 - \sqrt{c_2}/\log QT$, la Proposition 2.6 s'applique et on obtient, de la même façon qu'à la Proposition 2.8,

$$\begin{aligned} W(x,y;q,\eta) &= \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{r|(q/q_1)} \frac{\mu\left(\frac{q}{q_1 r}\right)\chi_1\left(\frac{q}{q_1 r}\right)}{\varphi\left(\frac{q}{q_1 r}\right)} \Psi_0(x/r, y; \chi_{q/(q_1 r)}, r\eta) \\ &\ll \Psi(x,y)(1+|\eta|x)\left(y^{-c_2} + \mathcal{L}^{c_2} + (\log x)^{3/2} x^{-c_2/\log Q}\right) \frac{\sqrt{q_1}}{\varphi(q_1)}\left(\frac{q}{q_1}\right)^{-\alpha} \sum_{r|(q/q_1)} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)}\left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} \Psi(x,y)(1+|\eta|x)R \end{aligned}$$

qui est de l'ordre de la majoration annoncée. On suppose maintenant $1-\beta \leq \sqrt{c_2}/\log QT$. De même qu'à la Proposition 2.10, par les Lemmes 2.4 et 2.1, on a

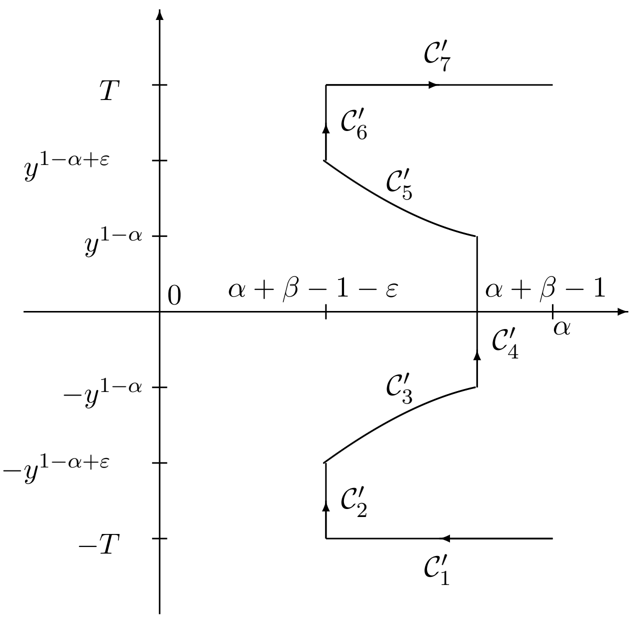
$$\begin{aligned} W(x,y;q,\eta) = &\frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} LW(s,q;y) x^s \check{\Phi}_0(\eta x, s)\mathrm{d}s \\ &+ O\left(\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)}\left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} \Psi(x,y)\frac{\log x \log T}{T^{\alpha/2}}\right) \end{aligned}$$

On déforme le contour pour suivre le chemin $\cup_{i=1}^7 \mathcal{C}'_i$, où

1. $\mathcal{C}'_1$ est le segment $[\alpha - iT, \alpha+\beta-1-\varepsilon-iT]$,
2. $\mathcal{C}'_2$ est le segment $[\alpha+\beta-1-\varepsilon-iT, \alpha+\beta-1-\varepsilon-iy^{1-\alpha+\varepsilon}]$,
3. $\mathcal{C}'_3$ est le chemin reliant le point $\alpha+\beta-1-\varepsilon-iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ au point $\alpha+\beta-1-iy^{1-\alpha}$ suivant la courbe $\tau = y^{\beta-\sigma}$,
4. $\mathcal{C}'_4$ est le segment $[\alpha+\beta-1-iy^{1-\alpha}, \alpha+\beta-1+iy^{1-\alpha}]$,
5. $\mathcal{C}'_5$ est le chemin reliant le point $\alpha+\beta-1+iy^{1-\alpha}$ au point $\alpha+\beta-1-\varepsilon+iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ suivant la courbe $\tau = -y^{\beta-\sigma}$,
6. $\mathcal{C}'_6$ est le segment $[\alpha+\beta-1-\varepsilon+iy^{1-\alpha+\varepsilon}, \alpha+\beta-1-\varepsilon+iT]$,
7. $\mathcal{C}'_7$ est le segment $[\alpha+\beta-1-\varepsilon+iT, \alpha+iT]$.

Pour $j \in \{1, \cdots, 7\}$, on note I'_j la contribution du chemin $\mathcal{C}'_j$:

$$I'_j = I'_j(\eta) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'_j} LW(s,q;y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x, s)\mathrm{d}s.$$



De la même façon que dans la démonstration de la Proposition 2.10, on a

$$\begin{aligned} I_7' &\ll \int_{\alpha+\beta-1-\varepsilon}^{\alpha} \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\sigma} \frac{\zeta(\alpha, y)x^{(\alpha-\sigma)/2}x^{\sigma}(1+|\eta|x)}{T} \mathrm{d}\sigma \\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} \frac{\Psi(x,y)(1+|\eta|x)\log x}{T}. \end{aligned}$$

Sur le segment $\mathcal{C}_6'$, on a encore $|\tau| \geq y^{\beta-\sigma}$, d'où par le Lemme 2.6,

$$\begin{aligned} I_6' &\ll \int_{y^{1-\alpha+\varepsilon}}^{T} \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{2-\alpha-\beta+\varepsilon} \frac{\zeta(\alpha, y)x^{(\beta-1)/2-\varepsilon/2}x^{\alpha}(1+|\eta|x)}{\tau} \mathrm{d}\tau \\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} \frac{\Psi(x,y)(1+|\eta|x)\log x \log T}{x^{\varepsilon/4}} \end{aligned}$$

quitte à supposer c_2 petite, afin d'avoir $q/q_1 \leq x^{1/4}$.

Sur le chemin $\mathcal{C}_5'$, les Lemme 2.6 et 2.7 permettent d'écrire pour un certain $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} |L(\sigma+i\tau, \chi_1; y)| &\ll |L(\alpha+\beta-1+i\tau, \chi_1; y)| x^{(\alpha+\beta-1-\sigma)/2} \\ &\ll \zeta(\alpha, y)x^{(\alpha+\beta-1-\sigma)/2} H(u)^{-\delta}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\varepsilon \log q \ll 1$, on obtient

$$\begin{aligned} I_5' &\ll \int_{\alpha+\beta-1-\varepsilon}^{\alpha+\beta-1} \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\sigma} \zeta(\alpha, y)x^{(\alpha+\beta-1+\sigma)/2} H(u)^{-\delta} \frac{(\log y)y^{2(\beta-\sigma)}\log(2+|\eta|x)}{(1+|\eta|x)^{\sigma}} \mathrm{d}\sigma \\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{q_1}\right)^{1-\alpha} \frac{\Psi(x,y)}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}x^{1-\beta}H(u)^{\delta/2}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'hypothèse $\log y \leq (\log x)/(\log\log x)^4$ sous la forme $(\log x)H(u)^{-\eta} \ll_\eta 1$ pour tout $\eta > 0$.

Sur $\mathcal{C}_4'$ les calculs sont similaires : par le Lemme 2.7 on a

$$\begin{aligned} I_4' &\ll \int_0^{y^{1-\alpha}} \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)} \Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{2-\alpha-\beta} \zeta(\alpha,y)H(u)^{-\delta}x^{\alpha+\beta-1}\frac{(1+|\tau|)\log(2+|\eta|x)}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}}\mathrm{d}\tau \\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\varphi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\frac{\Psi(x,y)}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}x^{1-\beta}H(u)^{\delta/2}} \end{aligned}$$

ce qui est de l'ordre de grandeur souhaité.

Pour $j \in \{1,2,3\}$, le caractère χ_1 étant réel, la même remarque qu'à la démonstration de la Proposition 2.10 est valable : on a $I_j'(\eta) = \overline{I_{8-j}'(-\eta)}$ et les majorations qui concernent I_{8-j}' s'appliquent.

En regroupant les différentes contributions et en observant que

$$\frac{1}{T^{\alpha/2}} + \frac{1}{T} + \frac{\log x \log T}{x^{\varepsilon/8}} \ll R$$

quitte à réduire la valeur de c_2, on obtient la majoration annoncée.

□

2.2.8 Démonstration du Théorème 2.2

On pose $Q = \lceil T_2^{c_2}\rceil$, en observant que $\log x/\log Q \gg \log\mathcal{L}$ lorsque $c_2 \le 1$. Quitte à supposer c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite, x, y et Q vérifient les hypothèses des Propositions 2.8, 2.10, et 2.13. Le terme d'erreur provenant de l'estimation (2.41) est

$$\ll (1+|\eta|x)\Psi(x,y)\left(y^{-c_3/\log\log\log x} + \mathcal{L}^{-c_3}\right) \ll \Psi(x,y)T_2^{-c_2}$$

pour une certaine constante c_3. Le terme d'erreur provenant de l'estimation (2.43) est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\varphi(q)}\left(\frac{(\log q)^2(\log(2+|\eta|x))^3}{(1+|\eta|x)^\alpha u} + (1+|\eta|x)\left(y^{-c_3} + \mathrm{e}^{-c_3(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}}\right)\right) \\ &\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\varphi(q)(1+|\eta|x)^\alpha}\frac{(\log q)^2(\log(2+|\eta|x))^3}{u} + \frac{\Psi(x,y)}{T_1^{c_2}} \end{aligned}$$

Enfin, la quantité R intervenant dans (2.48) est $\ll T_2^{-c_2}$. Ceci implique l'estimation (2.12).

Si on suppose de plus que $(x,y) \in (H_\varepsilon)$, $q \le \mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta|x \le \mathcal{Y}_\varepsilon/q$ pour un certain $\varepsilon > 0$, alors en évaluant $V(x,y;q,\eta)$ par la Proposition 2.12 plutôt que 2.10, on obtient l'estimation (2.14).

2.3 En norme L^2

On s'intéresse ici à l'obtention d'une majoration pour le deuxième moment de $V(x,y;q,\eta)$ et $W(x,y;q,\eta)$. Lorsque $2 \le y \le x$, on a

$$\int_0^1 |E(x,y;\vartheta)|^2\mathrm{d}\vartheta = \Psi(x,y).$$

Le lemme qui suit est une majoration de même ordre de grandeur pour les normes L^2 sur les arcs majeurs de $V(x,y;q,\eta)$ et $W(x,y;q,\eta)$, qui sont les termes principaux apparaissant dans l'estimation (2.41).

Proposition 2.15. *Lorsque $2 \leq y \leq x$, $Q \geq 2$ et $R \leq x$, on a*

$$\sum_{q \leq R} \varphi(q) \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} |V(x,y;q,\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \ll R^{1-\alpha} (\log x)^5 \Psi(x,y)$$

$$\sum_{q \leq R} \varphi(q)\nu(q) \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} |W(x,y;q,\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \ll \frac{q_1^2}{\varphi(q_1)^2} R^{1-\alpha} (\log x)^5 \Psi(x,y)$$

On note que $q_1/\varphi(q_1) \ll \log\log q_1$.

Démonstration. Soit q avec $\nu(q) = 1$. On note pour simplifier $r_1 := q/q_1$. On a

$$\begin{aligned} W(x,y;q,\eta) &= \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{r|r_1} \frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\varphi(r)} \sum_{m \in S(xr/r_1,y)} \mathrm{e}\left(\frac{mr_1}{r}\eta\right) \chi_r(m) \\ &= \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{r'|r_1} \sum_{m \in S(x/r',y)} \frac{\mu\left(\frac{r_1}{r'}\right) \chi_1\left(\frac{r_1}{r'}\right) \chi_{\frac{r_1}{r'}}(m)}{\varphi\left(\frac{r_1}{r'}\right)} \mathrm{e}(mr'\eta) \\ &= \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{n \in S(x,y)} \sum_{r'|(r_1,n)} \mathrm{e}(n\eta) \frac{\mu\left(\frac{r_1}{r'}\right) \chi_1\left(\frac{r_1}{r'}\right) \chi_{\frac{r_1}{r'}}\left(\frac{n}{r'}\right)}{\varphi\left(\frac{r_1}{r'}\right)}. \end{aligned}$$

Notons temporairement $w_{r'}(n) := \mu(r_1/r')\chi_1(r_1/r')\chi_{r_1/r'}(n/r')/\varphi(r_1/r')$. La présence du terme en $\chi_{r_1/r'}$ annule $w_{r'}(n)$ sauf si $(n/r', q/r') = 1$ soit $r' = (q,n)$. En particulier, lorsque $r' < (r_1, n)$ on a $w_{r'}(n) = 0$ et on obtient

$$W(x,y;q,\eta) = \frac{\tau(\chi_1)}{\varphi(q_1)} \sum_{n \in S(x,y)} \mathrm{e}(n\eta) w_{(r_1,n)}(n).$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &:= \sum_{\substack{q \leq R \\ q_1|q}} \varphi(q) \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} |W(x,y;q,\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{\tau(\chi_1)^2}{\varphi(q_1)^2} \sum_{\substack{q \leq R \\ q_1|q}} \varphi(q) \Bigg(\sum_{n \in S(x,y)} \frac{2}{qQ} w_{(r_1,n)}(n)^2 + \sum_{\substack{n,m \in S(x,y) \\ m \neq n}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi(m-n)}{qQ}\right)}{\pi(m-n)} w_{(r_1,n)}(n) w_{(r_1,m)}(m) \Bigg). \end{aligned}$$

On a $\sin(2\pi(m-n)/(qQ))/(\pi(m-n)) \ll 1/(qQ + |m-n|)$. La majoration $w_{r'}(n) \ll 1/\varphi(r_1/r')$ fournit donc

$$I \ll \frac{q_1}{\varphi(q_1)^2} \sum_{\substack{q \leq R \\ q_1|q}} \varphi(q) \sum_{n \in S(x,y)} \frac{1}{\varphi\left(\frac{r_1}{(r_1,n)}\right)} \left(\frac{1}{qQ} \sum_{n \leq m \leq n+qQ} \frac{1}{\varphi\left(\frac{r_1}{(r_1,m)}\right)} + \sum_{n+qQ < m \leq x} \frac{1}{(m-n)\varphi\left(\frac{r_1}{(r_1,m)}\right)} \right).$$

Le premier terme dans la parenthèse intérieure est

$$\leq \frac{1}{qQ} \sum_{d|r_1} \sum_{\frac{n}{d} \leq m' \leq \frac{n+qQ}{d}} \frac{1}{\varphi(r_1/d)} \leq \frac{\tau(r_1)}{\varphi(r_1)}.$$

Le second terme est

$$\leq \sum_{d|r_1} \frac{1}{\varphi(r_1/d)} \sum_{\frac{n+qQ}{d}<m'\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{m'd-n} \leq \sum_{d|r_1} \frac{1}{\varphi(r_1/d)} \int_{\frac{n+qQ}{d}-1}^{\frac{x}{d}} \frac{1}{td-n}\mathrm{d}t \ll (\log x)\frac{\tau(r_1)}{\varphi(r_1)}.$$

En utilisant (2.23), on obtient donc, en utilisant $\Psi(x/d,y) \ll r_1^{1-\alpha}\Psi(x,y)/d \quad (d \leq r_1)$,

$$\begin{aligned} I &\ll (\log x)\frac{q_1}{\varphi(q_1)^2} \sum_{\substack{q\leq R\\ q_1|q}} \frac{\varphi(q)\tau(r_1)}{\varphi(r_1)} \sum_{d|r_1} \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ d|n}} \frac{1}{\varphi(r_1/d)} \\ &\ll (\log x)\frac{q_1}{\varphi(q_1)^2}\Psi(x,y) \sum_{r_1\leq R/q_1} \frac{\varphi(q)\tau(r_1)^2 r_1^{1-\alpha}}{\varphi(r_1)^2}. \end{aligned}$$

On a $\varphi(q_1r_1) \leq q_1\varphi(r_1)$, la somme en r_1 est donc $\ll R^{1-\alpha}q_1(\log R)^4 \ll R^{1-\alpha}q_1(\log x)^4$, et on obtient

$$I \ll \frac{q_1^2}{\varphi(q_1)^2}R^{1-\alpha}(\log x)^5\Psi(x,y)$$

On remarque que l'on n'a fait aucune hypothèse spécifique à χ_r et q_1 pour mener ce calcul. Le cas $q_1 = 1$, χ_r étant alors le caractère principal de module r, mène à la majoration

$$\sum_{q\leq R} \varphi(q) \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} |V(x,y;q,\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta \ll R^{1-\alpha}(\log x)^5\Psi(x,y)$$

□

2.4 Application à un théorème de Daboussi

Démonstration du Théorème 2.3. On suit la démonstration de [dlBT05a, théorème 1.5]. Le lecteur peut s'y référer pour les détails. On ne reprend ici que les étapes intermédiaires. Soit c la constante donnée par le Théorème 2.1 et $Y : [2,\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que pour tout $x \geq 2$, on ait $(x, Y(x)) \in \mathcal{D}_c$. Soit ϑ un irrationnel et $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ une fonction multiplicative, on suppose

$$\sum_{n\in S(x,y)} |f(n)|^2 \leq K_f\Psi(x,y) \quad (Y(x) \leq y \leq x)$$

pour un certain réel $K_f > 0$ dépendant au plus de f. On suppose $Y(x) \leq y \leq x$; en particulier $\alpha \geq 3/4$ pour x et y assez grands. On note $E_f(x,y;\vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} f(n)\mathrm{e}(n\vartheta)$. Les calculs faits dans [dlBT05a, formule (8.6)], qui découlent d'une forme duale de l'inégalité de Turán-Kubilius [dlBT05a, théorème 1.2], montrent que pour tout $z \geq 2$,

$$E_f(x,y;\vartheta) = \frac{1}{L(z)} \sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}} \sum_{m\in S(x/p,y)} f(p)f(m)\mathrm{e}(mp\vartheta) + O\left(\frac{\sqrt{K_f}\Psi(x,y)}{\sqrt{L(z)}}\right)$$

où l'on a noté

$$L(z) := \sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}} \frac{1-p^{-\alpha}}{p^\alpha} \asymp \sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}} \frac{1}{p^\alpha}.$$

On a également, d'après [Dab75, lemma 1], pour un certain réel $z_0 = z_0(f) \geq 2$ et tout $z \geq z_0$,

$$L(z) \gg \sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}} \frac{1}{p} \gg \log\log z$$

grâce à l'hypothèse faite sur f. Toujours d'après les calculs faits dans [dlBT05a], par une inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}} \sum_{m\in S(x/p,y)} f(p)f(m)\mathrm{e}(mp\vartheta) \\ &\ll \sqrt{K_f\Psi(x,y)}\Bigg(\sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}} \Psi(x/p,y) + \sum_{\substack{p<q\leq z\\ |f(p)|,|f(q)|\leq 2}} |E(x/p,y;(p-q)\vartheta)|\Bigg)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Le Théorème 2.1 dans le cas $y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, et par exemple [dlBT05a, théorème 1.5] dans le cas contraire impliquent que chaque terme de la seconde somme du membre de droite est $o_{\vartheta,p,q}(\Psi(x/p,y))$ lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant $Y(x) \leq y \leq x$. Le nombre de termes est borné par une fonction de z, par l'estimation (2.23), le membre de gauche de (2.49) est donc $\ll \sqrt{K_f}\Psi(x,y)(\sqrt{L(z)} + o_{\vartheta,z}(1))$ pour tout $z \geq z_0$ fixé, ainsi

$$\limsup_{\substack{x,y\to\infty\\ Y(x)\leq y\leq x}} \frac{E_f(x,y;\vartheta)}{\sqrt{K_f}\Psi(x,y)} \ll \frac{1}{\sqrt{L(z)}}$$

et le résultat voulu suit en faisant tendre z vers l'infini. □

2.5 Application aux sommes friables d'entiers friables

On rappelle que $N(x,y)$ a été défini en (2.16).

Démonstration du Théorème 2.4. On a pour tous x et y avec $2 \leq y \leq x$,

$$N(x,y) = \int_0^1 E(x,y;\vartheta)^2 E(x,y;-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta.$$

Soit $c > 0$ et $(x,y) \in \mathcal{D}_c$. Lorsque $y \geq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, le résultat de La Bretèche et Granville [dlBG12, théorème 1.1] est valable, on suppose donc $y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$. On note $Q := \lceil x/\mathcal{L}^{c_2}\rceil$, $R := \lceil \mathcal{L}^{c_2}\rceil$, et on suppose c suffisamment grande et c_2 suffisamment petite pour que les hypothèses des Propositions 2.8, 2.10 et 2.13 soient vérifiées pour x, y et R (dans le rôle de Q). Lorsque ϑ vérifie $q(\vartheta,Q) > R$, on a d'après le Lemme A,

$$E(x,y;\vartheta) \ll x\mathcal{L}^{-c_3} \ll \Psi(x,y)\mathcal{L}^{-c_3/2}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, quitte à supposer $c > 2/c_3$. La contribution des ϑ vérifiant $q(\vartheta,Q) > R$ est donc

$$\ll \frac{\Psi(x,y)}{\mathcal{L}^{c_3/2}} \int_0^1 |E(x,y;\vartheta)|^2\mathrm{d}\vartheta = \frac{\Psi(x,y)^2}{\mathcal{L}^{c_3/2}} \ll \frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{L}^{c_3/4}}$$

quitte à supposer $c > 4/c_3$. Lorsque $q = q(\vartheta,Q) \leq R$, on écrit $\vartheta = a/q + \eta$ avec $|\eta| \leq 1/(qQ)$. On remarque que $q(-\vartheta,Q) = q(\vartheta,Q)$. La Proposition 2.6 assure l'existence de $c_4 > 0$ telle que

$$E(x,y;\vartheta) = V(x,y;q,\eta) + \nu(q)\chi_1(a)W(x,y;q,\eta) + O(\Psi(x,y)\mathcal{L}^{-c_4}).$$

Grâce à la Proposition 2.15, on a

$$\frac{\Psi(x,y)}{\mathcal{L}^{c_4}}\sum_{q\leq R}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}|V(x,y;q,\eta)+\nu(q)\chi_1(a)W(x,y;q,\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta$$
$$=O\Big((\log\log x)^2(\log x)^3\Psi(x,y)^2\mathcal{L}^{-c_4}\Big)=O\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{L}^{c_4/2}}\right)$$

quitte à supposer $c>2/c_4$. En notant que l'on a $\chi_1(a)^2=1$ lorsque $(a,q)=1$, et que $\sum_{(a,q)=1}\chi_1(a)=0$, on obtient pour un certain réel $c_5>0$

$$N(x,y)=NV(x,y)+NW(x,y)+O\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{L}^{c_5}}\right)$$

avec

$$NV(x,y):=\sum_{q\leq R}\varphi(q)\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}V(x,y;q,\eta)^2V(x,y;q,-\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$NW(x,y):=\sum_{q\leq R}\nu(q)\varphi(q)\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}\Big(2V(x,y;q,\eta)|W(x,y;q,\eta)|^2+V(x,y;q,-\eta)W(x,y;q,\eta)^2\Big)\,\mathrm{d}\eta.$$

En appliquant les estimations (2.44) et (2.48) et en remarquant que $(1+|\eta|x)^{1-\alpha}=O(1)$ et $q^{1-\alpha}=O(1)$, on obtient après intégration par rapport à η et sommation sur q, pour un certain $c_6>0$,

$$NW(x,y)\ll\frac{8^{\omega(q_1)}\Psi(x,y)^3}{q_1x}\left(\frac{1}{H(u)^{\delta}x^{2-2\beta}}+\frac{1}{\mathcal{L}^{c_6}}\right)\ll\frac{\Psi(x,y)\log u}{x\log y}. \tag{2.50}$$

On fixe un réel $\varepsilon>0$ tel que $1/\mathcal{Y}_{2\varepsilon}\ll(\log u)/\log y$. Grâce à la majoration (2.44), on obtient

$$\begin{aligned}NV(x,y)=&\sum_{q\leq\mathcal{Y}_\varepsilon}\varphi(q)\int_{-\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}^{\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}V(x,y;q,\eta)^2V(x,y;q,-\eta)\mathrm{d}\eta\\&+O\bigg(\sum_{q>\mathcal{Y}_\varepsilon}\frac{8^{\omega(q)}(\log q)^2\Psi(x,y)^3}{\varphi(q)^2}\int_0^{1/(qQ)}\frac{(\log(2+|\eta|x))^3\mathrm{d}\eta}{(1+|\eta|x)^3}\bigg)\\&+O\bigg(\sum_{q\geq1}\frac{8^{\omega(q)}(\log q)^2\Psi(x,y)^3}{\varphi(q)^2}\int_{\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}^{\infty}\frac{(\log(2+|\eta|x))^3\mathrm{d}\eta}{(1+|\eta|x)^3}\bigg).\end{aligned}$$

Les termes d'erreur sont $\ll\Psi(x,y)^3/(x\mathcal{Y}_{2\varepsilon})$. La Proposition 2.12 fournit alors, pour $q\leq\mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta|x\leq\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)$,

$$V(x,y;q,\eta)^2V(x,y;q,-\eta)=\widetilde{V}(x,y;q,\eta)^2\widetilde{V}(x,y;q,-\eta)+O\left(\frac{8^{\omega(q)}\Psi(x,y)^3}{\varphi(q)^3(1+|\eta|x)^2\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right),$$

on obtient donc

$$NV(x,y)=\sum_{q\leq\mathcal{Y}_\varepsilon}\varphi(q)\int_{-\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}^{\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}\widetilde{V}(x,y;q,\eta)^2\widetilde{V}(x,y;q,-\eta)\mathrm{d}\eta+O\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right)$$

On fait maintenant appel aux estimations suivantes, qui sont respectivement la formule (4.22) et le lemme 5.1 de [dlBG12].

Lemme 2.8. *Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque $(x,y) \in (H_\varepsilon)$, on a*

$$\widetilde{V}(x,y;q,\eta) \ll_\varepsilon \frac{\mathcal{Y}_\varepsilon^{2(1-\alpha)} u(\log u) 2^{\omega(q)} \Psi(x,y)}{\varphi(q)|\eta| x} \qquad (q \leq \mathcal{Y}_\varepsilon, \eta \neq 0), \tag{2.51}$$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ k|n}} \lambda\left(\frac{n}{k}, y\right) \int_{-1/(2k)}^{1/(2k)} \mathrm{e}((n'-n)\eta)\mathrm{d}\eta$$
$$= \frac{\lambda(n'/k,y)}{k} \mathbf{1}_{[1,x]}(n') + O_\varepsilon\left(\frac{ky/(\log y)}{\min\{|x-n'|+1, |n'-k|+1, n'\}}\right) \quad (n' \in \mathbf{N}, k \leq \mathcal{Y}_\varepsilon), \tag{2.52}$$

Démonstration. D'après les calculs de la Proposition 2.12 et en particulier l'estimation (2.47), on a pour tout diviseur k de q,

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x/k} \mathrm{e}(nk\eta)\lambda(n,y) &= E(x/k, x/k; k\eta)\lambda(x/k,y) - \int_{x/(k\mathcal{Y}_\varepsilon)}^{x} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\mathrm{d}t + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{k\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right) \\ &\ll \frac{\mathcal{Y}_\varepsilon^{2-2\alpha} u \log u \Psi(x,y)}{k|\eta| x}.\end{aligned}$$

En reportant cette majoration dans (2.15), on obtient l'estimation (2.51).

En ce qui concerne l'estimation (2.52), on peut suivre la même preuve que celle de [dlBG12, lemme 5.1], en remarquant que les seules estimations utilisées sont $\lambda(t,y) \ll 1 \ \ (t, y \geq 2)$ ainsi que (2.46), toutes deux valables sous nos hypothèses. □

L'estimation (2.51) fournit

$$\begin{aligned}NV(x,y) = &\sum_{q \leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \varphi(q) \int_{-1/(2k_3)}^{1/(2k_3)} \widetilde{V}(x,y;q,\eta)^2 \widetilde{V}(x,y;q,-\eta)\mathrm{d}\eta \\ &+ O\left(\mathcal{Y}_\varepsilon^{4-6\alpha}(u \log u)^3 \sum_{q \leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \frac{8^{\omega(q)} q^2}{\varphi(q)^2} \frac{\Psi(x,y)^3}{x} + \frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

Sous nos hypothèses sur x et y, on a $u = \mathcal{Y}_\varepsilon^{o(1)}$ et $\alpha = 1 + o(1)$ lorsque x et y tendent vers l'infini, le terme d'erreur est donc $O(\Psi(x,y)^3/(x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}))$. En développant le terme $\widetilde{V}(x,y;q,-\eta)$, on écrit

$$NV(x,y) = \sum_{q \leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \mathrm{nv}(x,y;q) + R(x,y) + O\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right) \tag{2.53}$$

où l'on a posé, de même que dans [dlBG12],

$$\mathrm{nv}(x,y;q) = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \in \mathbf{N} \\ k_i | q}} \mu\left(\frac{q}{k_1}\right)\mu\left(\frac{q}{k_2}\right)\mu\left(\frac{q}{k_3}\right) \frac{k_1 k_2}{\varphi(q)^2} \sum_{\substack{n_1,n_2 \in \mathbf{N} \\ n_1+n_2 \leq x \\ k_i | n_i}} \lambda\left(\frac{n_1}{k_1}, y\right)\lambda\left(\frac{n_2}{k_2}, y\right)\lambda\left(\frac{n_1+n_2}{k_3}, y\right)$$

et la majoration (2.52) fournit

$$\begin{aligned}R(x,y) \ll \frac{y}{\log y} &\sum_{q \leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \frac{1}{\varphi(q)^2} \sum_{k_1,k_2,k_3 | q} \mu^2\left(\frac{q}{k_1}\right)\mu^2\left(\frac{q}{k_2}\right)\mu^2\left(\frac{q}{k_3}\right) k_1 k_2 k_3^2 \\ &\sum_{\substack{n_1 \leq x \\ n_2 \leq x \\ k_i | n_i}} \lambda\left(\frac{n_1}{k_1}, y\right)\lambda\left(\frac{n_2}{k_2}, y\right)\left\{\frac{1}{|x-n_1-n_2|+1} + \frac{1}{|n_1+n_2-k_3|+1} + \frac{1}{n_1+n_2}\right\}.\end{aligned}$$

En majorant trivialement $\lambda(n_i/k_i, y)$ par $O(1)$, puis la somme sur (n_1, n_2) par $O(x \log x)$, on obtient

$$R(x,y) \ll xyu\mathcal{Y}_\varepsilon^6 \ll \frac{\Psi(x,y)}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}. \tag{2.54}$$

Lorsque $qy \leq n \leq x$, on a $\lambda(n/k, y) \ll (kx/n)^{1-\alpha}\rho(u)$. Par ailleurs,

$$\sum_{\substack{qy \leq n_i \leq x \\ k_i | n_i}} (n_1 n_2 (n_1 + n_2))^{\alpha - 1} \leq \frac{1}{k_1 k_2} \int_0^x \int_0^x (t_1 t_2 (t_1 + t_2))^{\alpha-1} \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_1 \ll \frac{x^{3\alpha - 1}}{k_1 k_2}.$$

En utilisant $qyx \ll \Psi(x,y)^3/x$, on obtient $\mathrm{nv}(x,y;q) \ll 8^{\omega(q)} q^{3(1-\alpha)} \Psi(x,y)^3/(\varphi(q)^2 x)$. La série de terme général $\mathrm{nv}(x,y;q)$ est donc convergente et on a

$$NV(x,y) = \sum_{q \geq 1} \mathrm{nv}(x,y;q) + O\left(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\right).$$

En utilisant la notation de [dlBG12, lemme 5.5], on écrit

$$\sum_{q \geq 1} \mathrm{nv}(x,y;q) = \sum_{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3} g(k_1,k_2,k_3) S(k_1,k_2,k_3) \tag{2.55}$$

où l'on a posé

$$S(k_1,k_2,k_3) := \sum_{\substack{(n_1,n_2) \in \mathbf{N}^2 \\ k_i | n_i \\ n_1 + n_2 \leq x}} \lambda\left(\frac{n_1}{k_1}, y\right) \lambda\left(\frac{n_2}{k_2}, y\right) \lambda\left(\frac{n_1+n_2}{k_3}, y\right) \tag{2.56}$$

et où $g(k_1,k_2,k_3)$ vérifie

$$\sum_{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3} \frac{g(k_1,k_2,k_3)}{k_1 k_2} = 1, \qquad \sum_{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3} \frac{|g(k_1,k_2,k_3)|(k_1 k_2 k_3)^{1/4}}{k_1 k_2} \ll 1.$$

D'après ce qui précède, on a $S(k_1,k_2,k_3) \ll (k_1 k_2 k_3)^{1-\alpha} \Psi(x,y)^3/(k_1 k_2 x)$. Il en découle que dans la somme du membre de droite de (2.55), la contribution des triplets (k_1,k_2,k_3) avec $k_1 k_2 k_3 \geq (\log y)^5$ est $O(\Psi(x,y)^3/(x \log y))$. Étant donné un triplet (k_1,k_2,k_3) vérifiant $k_1 k_2 k_3 \leq (\log y)^5$, dans le membre de droite de (2.56) :

- la contribution des (n_1,n_2) vérifiant $n_1 \leq k_1 y$ ou $n_2 \leq k_2 y$ est $O((\log y)^5 yx)$, ce qui est largement $O(\Psi(x,y)^3/(x \log y))$,
- la contribution des (n_1,n_2) vérifiant $k_2 y \leq n_2 \leq k_2 x/(\log y)^6$ et $n_1 \geq k_1 y$ est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{(k_1 k_2 k_3)^{1-\alpha} \Psi(x,y)^3}{x^{3\alpha}} \sum_{\substack{k_1 y \leq n_1 \leq x \\ k_2 y \leq n_2 \leq k_2 x/(\log y)^6 \\ k_i | n_i}} (n_1 n_2 (n_1 + n_2))^{\alpha - 1} \\ &\ll \frac{(k_1 k_2 k_3)^{1-\alpha} \Psi(x,y)^3}{k_1 k_2 x (\log y)^{2\alpha}} \ll \frac{\Psi(x,y)^3}{k_1 k_2 x \log y} \end{aligned}$$

  puisque $\alpha = 1 + o(1)$ lorsque x et y tendent vers l'infini,
- la contribution des (n_1,n_2) vérifiant $k_1 y \leq n_1 \leq k_1 x/(\log y)^6$ et $n_2 \geq k_2 y$ se majore de façon identique,

– lorsque $n/k \geq x/(\log y)^6$, on a

$$\lambda\left(\frac{n}{k}, y\right) = \rho\left(\frac{\log(n/k)}{\log y}\right)\left\{1 + O\left(\frac{\log u}{\log y}\right)\right\} = \rho(u)\left\{1 + O\left(\frac{(\log u)\log(kx/n)}{\log y}\right)\right\}.$$

La contribution des (n_1, n_2) vérifiant $n_i/k_i \geq x/(\log y)^6$ vaut donc

$$\frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\left\{1 + O\left(\frac{(\log u)\log(k_1k_2k_3)}{\log y}\right)\right\}$$

où l'on a utilisé la majoration $\sum_{x/(\log y)^6 \leq m \leq x/k} \log(x/m) \ll x(\log k)/k$.
En regroupant les résultats, on obtient

$$\sum_{q \geq 1} \mathrm{nv}(x, y; q) = \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\left\{1 + O\left(\frac{\log u}{\log y}\right)\right\}$$

et l'estimation (2.18) en découle en reportant cela avec (2.54) dans (2.53).

□

Deuxième partie

Entiers friables translatés

Chapitre 3

Propriétés multiplicatives des entiers friables translatés

3.1 Introduction

Un entier n est dit y-friable si son plus grand facteur premier $P(n)$ est inférieur ou égal à y, avec la convention $P(1) = 1$. On note $S(x, y)$ l'ensemble des entiers inférieurs à x qui sont y-friables, et $\Psi(x, y) := \text{card } S(x, y)$. Il est intéressant d'étudier dans quelle mesure les propriétés multiplicatives des entiers friables translatés, de la forme $n-1$ où $P(n) \leq y$, sont similaires en moyenne à celles des entiers normaux, c'est-à-dire pris dans leur globalité. On pose $S^*(x, y) := S(x, y) \smallsetminus \{1\}$. Dans ce travail, on présente deux résultats concernant la répartition des entiers friables translatés, qui améliorent des estimations antérieures en faisant usage d'un article récent de Harper [Har12a].

On étudie d'abord le problème du calcul de la valeur moyenne de fonctions arithmétiques sur les friables translatés. Cette question est abordée par Fouvry et Tenenbaum [FT90] pour le cas de la fonction $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, et récemment par Loiperdinger et Shparlinski [LS10] dans le cas de la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$, puis par Basquin [Bas10] qui améliore leurs résultats. À toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ on associe la fonction λ définie par

$$\lambda(n) := (f * \mu)(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

où μ désigne la fonction de Möbius, ainsi que la quantité définie pour $2 \leq y \leq x$ par :

$$R_f(x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S^*(x,y)} f(n - 1).$$

On définit le domaine

$$2 \leq \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x \tag{H_ε}$$

où $\log_k x$ désigne le k-ième itéré du logarithme évalué en x. Basquin [Bas10] obtient le résultat suivant.

Théorème A. *Pour toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ multiplicative vérifiant pour deux réels positifs B, β et tout $n \in \mathbf{N}$ l'inégalité $|\lambda(n)| \leq Bn^{-\beta}$, on a l'estimation*

$$R_f(x, y) = R_f(x, x) + O_{B,\beta}\left(\frac{\log(u + 1)}{\log y}\right) \qquad ((x, y) \in H_\varepsilon). \tag{3.1}$$

Sous l'hypothèse sur f de cet énoncé, le terme principal du membre de droite de (3.1) converge lorsque $x \to \infty$ vers la valeur moyenne de f, qui s'exprime en fonction de λ grâce à la relation

$$\lim_{x\to\infty} R_f(x,x) = \sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q)}{q}.$$

On établit ici une estimation de même nature que (3.1), valable pour des fonctions f plus générales et dans un plus grand domaine en (x, y). On note $u := (\log x)/\log y$ et $\alpha = \alpha(x, y)$ l'unique solution réelle positive à l'équation

$$\log x = \sum_{p\leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}$$

et on pose pour tout $\beta \in [0, 1]$

$$g_q(\beta) := \prod_{p|q} (1 - p^{-\beta}). \tag{3.2}$$

On a $\alpha \in [0, 1]$ et $1 - \alpha \sim \log(u + 1)/\log y$ lorsque $x, y \to \infty$ avec $(\log x)^2 \leq y \leq x$.

Théorème 3.1. *Supposons que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ soit une fonction telle que pour certains réels $B, \beta > 0$ on ait*

$$\sum_{q\geq 1} \frac{|\lambda(q)|}{q^{1-\beta}} \leq B, \tag{3.3}$$

*et telle que l'*une des deux conditions *suivantes soit vérifiée :*

– *$\lambda(n) \leq B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et un certain $B > 0$ fixé,*

– *f est multiplicative, λ l'étant alors également.*

Alors il existe $c > 0$ dépendant au plus de β telle que lorsque $2 \leq (\log x)^c \leq y \leq x$, on ait

$$R_f(x, y) = \sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\left(\min\left\{\frac{1}{u}, \frac{\log(u + 1)}{\log y}\right\}\right). \tag{3.4}$$

En particulier, on a dans le même domaine

$$R_f(x, y) = R_f(x, x) + O\Big(\frac{\log(u + 1)}{\log y}\Big). \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. Lorsque f est multiplicative, le terme principal du membre de droite de (3.4) peut s'écrire comme un produit eulérien :

$$\sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} = \prod_p \Big(1 + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-1}} \sum_{\nu\geq 1} \frac{\lambda(p^\nu)}{p^\nu}\Big). \tag{3.6}$$

Lorsque $\alpha \to 1$, autrement dit lorsque le terme d'erreur de (3.4) tend vers 0, le comportement de $R_f(x, y)$ est comparable à celui de $R_f(x, x)$. Cela diffère du cas où α s'éloigne de 1, où les évènements “être y-friable” et “être divisible par p” sur les entiers inférieurs à x ne peuvent plus heuristiquement être considérés comme indépendants lorsque $p \leq y$.

Une autre question concernant les friables translatés et étudiée par Fouvry et Tenenbaum [FT96] est leur nombre de facteurs premiers distincts. Posant pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $2 \leq y \leq x$,

$$\Phi(t) := \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-v^2/2}\mathrm{d}v/\sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad \Psi(x, y; t) := \mathrm{card}\left\{n \in S^*(x, y) \;\middle|\; \frac{\omega(n - 1) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \leq t\right\},$$

ils obtiennent l'estimation suivante.

Théorème B. *Soit A un réel positif. Lorsque $t \in \mathbf{R}$ et $\exp\{(\log x)/(\log_2 x)^A\} \leq y \leq x$, on a*

$$\frac{\Psi(x,y;t)}{\Psi(x,y)} = \Phi(t) + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right). \tag{3.7}$$

Dans le cas $y = x$ ceci découle du théorème d'Erdös-Kac (*cf.* [Ten07, théorème III.4.15]). On montre ici que cette estimation est valable dans un plus large domaine en (x, y).

Théorème 3.2. *Il existe un réel $c > 0$ telle que l'estimation* (3.7) *soit valable uniformément lorsque $t \in \mathbf{R}$ et $2 \leq (\log x)^c \leq y \leq x$.*

Remerciements. L'auteur est très reconnaissant à directeur de thèse Régis de la Bretèche pour ses remarques et conseils durant la rédaction de ce papier, ainsi qu'à Gérald Tenenbaum pour sa relecture et ses encouragements.

3.2 Bombieri-Vinogradov pour les entiers friables

On définit pour tous entiers a, q et tous réels x, y avec $2 \leq y \leq x$

$$\Psi(x,y;a,q) := \text{card}\,\{n \in S(x,y) \mid n \equiv a \pmod q\},$$

$$\Psi_q(x,y) := \text{card}\,\{n \in S(x,y) \mid (n,q) = 1\},$$

et on note

$$u := \frac{\log x}{\log y} \qquad H(u) := \exp\left\{\frac{u}{\log(u+2)}\right\}.$$

Dans l'étude des entiers friables, la question du domaine en (x, y) dans lequel les résultats que l'on énonce sont valables est importante. Hildebrand [Hil84] a montré que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\Psi(x,y) \sim_\varepsilon x\rho(u) \quad (x \to \infty, (\log x)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x)$$

où ρ est la fonction de Dickman, solution continue sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation $u\rho'(u)+\rho(u-1) = 0$ avec la condition initiale $\rho(u) = 1$ pour $u \in [0, 1]$. Dans [Hil86], Hildebrand montre que cette assertion est vraie lorsque $x, y \to \infty$ avec $(x, y) \in (H_\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. L'exposant $5/3$ dans la définition de (H_ε) est lié à l'exposant $2/3$ apparaissant dans la région sans zéro de ζ de Vinogradov-Korobov. Les travaux de Hildebrand et Tenenbaum [HT86] et La Bretèche et Tenenbaum [dlBT05b], qui font usage de la méthode du col, élucident en partie le comportement de $\Psi_q(x, y)$, notamment par le biais de résultats locaux : on peut établir un lien entre les valeurs de $\Psi_q(x, y)$ à celle de $\Psi(x, y)$ même dans des domaines où aucune approximation régulière de $\Psi(x, y)$ n'est connue. On a plus précisément les deux résultats suivants, qui sont respectivement un cas particulier du théorème 2.1 et un corollaire de la formule (4.1) de [dlBT05b].

Lemme C. *(i) Lorsque $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $m \in \mathbf{N}$ avec $2 \leq (\log x)^2 \leq y \leq x$, $P(m) \leq y$ et $\omega(m) \ll \sqrt{y}$, on a*

$$\Psi_m(x,y) = \Psi(x,y)g_m(\alpha)\left\{1 + O\left(\frac{E_m(1+E_m)}{u}\right)\right\} \tag{3.8}$$

où, ayant posé $\gamma_m := \log(\omega(m)+2)\log(u+1)/\log y$, $E_m = E_m(x, y)$ vérifie

$$E_m \ll (\log u)^{-1}\{\exp(2\gamma_m) - 1\}. \tag{3.9}$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque $m \in \mathbf{N}$ avec $\omega(m) \ll \sqrt{y}$ et $P(m) \leq y$, on a

$$\Psi_m(x, y) = \Psi(x, y)\Big\{\frac{\varphi(m)}{m} + O_\varepsilon\Big(\frac{2^{\omega(m)}\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \qquad ((x, y) \in (H_\varepsilon)). \tag{3.10}$$

Ainsi, pour de petits modules m et lorsque α est loin de 1, les entiers de $S(x, y)$ ne sont pas bien répartis dans toutes les classes modulo m puisqu'une proportion inférieure à $\varphi(m)/m$ se trouve dans les classes inversibles. Cependant, on sait suite à des travaux de Soundararajan [Sou08] précisés par Harper [Har12b] qu'il y a équirépartition dans une large mesure à l'intérieur des classes inversibles : pour tout $\varepsilon > 0$, la relation

$$\Psi(x, y; a, q) \sim_\varepsilon \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)}$$

est valable lorsque $(a, q) = 1$, $\log x/\log q \to \infty$, $y \geq y_0(\varepsilon)$ et $q \leq y^{4\sqrt{e}-\varepsilon}$. Comme l'indique Soundararajan [Sou08], il semble difficile d'améliorer l'exposant $4\sqrt{e}$. On peut cependant espérer obtenir des résultats si l'on considère l'erreur moyenne de la répartition de $S(x, y)$ dans les différentes classes modulo q pour $q \leq Q$ avec Q de l'ordre d'une puissance de x. Les Théorèmes 3.1 et 3.2 découlent plus précisément de bonnes estimations pour la quantité

$$\Delta(x, y; Q) := \sum_{q\leq Q}\Big|\Psi(x, y; 1, q) - \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)}\Big|.$$

Fouvry et Tenenbaum [FT96] donnent un panorama des résultats antérieurs et obtiennent pour tous réels positifs ε, A fixés la majoration

$$\Delta(x, y; \sqrt{x}\exp\{-(\log x)^{1/3}\}) \ll \Psi(x, y)H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} \qquad (\exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x)$$

pour un certain $\delta = \delta(\varepsilon, A)$. Harper [Har12a], améliorant leur résultat, obtient pour tout $Q \leq \sqrt{\Psi(x, y)}$, $A > 0$ et pour deux constantes absolues $c, \delta > 0$ la majoration

$$\Delta(x, y; Q) \ll_A \Psi(x, y)\{y^{-\delta}+H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}\}+Q\sqrt{\Psi(x, y)}(\log x)^4 \qquad ((\log x)^c \leq y \leq x).$$

C'est cette majoration qui est à l'œuvre dans les Théorèmes 3.1 et 3.2.

La proposition qui suit est une version pondérée de [Har12a, theorem 1].

Proposition 3.2. *Soit $\vartheta > 0$. Il existe deux constantes $c, \delta > 0$ pouvant dépendre de ϑ telles que lorsque $2 \leq (\log x)^c \leq y \leq x$ et $1 \leq Q \leq \sqrt{\Psi(x, y)}$, pour toute fonction $\lambda : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ vérifiant pour un certain $B \geq 0$ les conditions suivantes :*

(i) $\lambda(mn) \leq \lambda(m)\lambda(n) \qquad ((m, n) \in \mathbf{N}^2)$,

(ii) $\sum_{n\leq z}\lambda(n) \ll z(\log z)^B \qquad (z \geq 2)$,

(iii) $\lambda(n) \ll n^{1-\vartheta} \qquad (n \geq 1)$,

on ait

$$\begin{aligned}\sum_{q\leq Q}\lambda(q)\max_{(a,q)=1}&\Big|\Psi(x, y; a, q) - \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)}\Big| \\ &= O_B\Big(\Psi(x, y)\{H(u)^{-\delta} + y^{-\delta}\}\Big) + O\Big(Q\sqrt{\Psi(x, y)}(\log x)^{7/2}\max_{q\leq Q}\lambda(q)\Big).\end{aligned} \tag{3.11}$$

De plus, il existe $\eta = \eta(\vartheta) > 0$ tel que lorsque $Q \leq x^\eta$, le membre de gauche de (3.11) soit

$$O_B\Big(\Psi(x, y)\{H(u)^{-\delta} + y^{-\delta}\}\Big).$$

Autrement dit, le deuxième terme d'erreur de (3.11) n'est à prendre en compte que lorsque $Q > x^\eta$.

Démonstration. Le résultat énoncé dans [Har12a, theorem 1] correspond au cas particulier $\lambda = \mathbf{1}$. Le cas général se montre de façon identique, c'est pourquoi on se contente ici d'indiquer les modifications à apporter à la preuve de [Har12a, theorem 1]

Le membre de gauche de (3.11) est majoré par

$$\sum_{r\leq Q} \sum_{\substack{\chi^* \pmod r \\ \chi^* \text{ primitif}}} \sum_{q\leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \text{ induit par } \chi^*}} \left| \sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \right|. \tag{3.12}$$

Pour tout $\eta > 0$ fixé, les calculs de Harper (voir la proposition 2 et le paragraphe 4.4 de [Har12a]) montrent que la contribution des $r > x^\eta$ à la première somme de (3.12) est

$$O\left((\log x)^{7/2} \sqrt{\Psi(x,y)} \left\{ Q + x^{1/2-\eta} (\log x)^2 \right\} \max_{q\leq Q} \lambda(q) \right)$$

en majorant trivialement $\lambda(q)$.

La contribution des $r \leq x^\eta$ est majorée comme suit :

$$\sum_{r\leq x^\eta} \sum_{\substack{\chi^* \pmod r \\ \chi^* \text{ primitif}}} \sum_{q\leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \text{ induit par } \chi^*}} \left| \sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \right| \ll \Psi(x,y) \left(H(u)^{-c_2} + y^{-c_2} \right).$$

Cela est l'analogue de la formule (3.1) de [Har12a] et se montre de façon similaire. Il convient de changer la définition de $\mathcal{G}_2$ en remplaçant la condition $\mathfrak{Re}(s) > 299/300$ par $\mathfrak{Re}(s) > 1 - \vartheta/300$. Lors la majoration de la contribution des caractères dans $\mathcal{G}_2$, on pose

$$\epsilon := \min\{\vartheta/300, (10 \log r)/\log y\}$$

en vérifiant que ce choix de ϵ vérifie encore la condition $40 \log\log(qyH)/\log y \leq \epsilon$, quitte à augmenter la valeur de c (appellée K dans la notation de [Har12a]) et à diminuer celle de η en fonction de ϑ. Le reste des calculs sont valables avec le poids $\lambda(q)$ grâce aux propriétés suivantes, qui découlent des hypothèses sur λ :

- lorsque $q = rs$, on a $\lambda(q)/\varphi(q) \leq \lambda(r)\lambda(s)/(\varphi(r)\varphi(s))$,
- on a $\sum_{s\leq Q} \lambda(s)/\varphi(s) \ll (\log Q)^{B+2}$ ainsi que $\sum_{r\geq R} \lambda(r)/r^2 \ll (\log R)^B/R$,
- étant donné $R \geq 2$, on a

  $$\sum_{R<r\leq 2R} \sideset{}{^\sharp}\sum_{\chi^* \pmod r} \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)} \ll \frac{\log_2 R}{R^\vartheta} (R^{102})^{(5/2)(\vartheta/300)} \ll R^{-\vartheta/10},$$

  où la somme $\sum^\sharp$ porte sur les caractères primitifs χ^* modulo r tels que la série de Dirichlet associée $L(s,\chi^*)$ ait au moins un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta > 1 - \vartheta/300$ et $|\gamma| \leq r^{100}$,
- on a enfin pour tout $r \in \mathbf{N}$,

  $$\sum_{\substack{q\leq Q \\ r|q}} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{d|q/r} \frac{1}{\sqrt{d}} \ll \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)} \sum_{d\leq Q/r} \frac{\lambda(d)}{\sqrt{d}\varphi(d)} \sum_{m\leq Q/(rd)} \frac{\lambda(m)}{\varphi(m)} \ll (\log Q)^{B+2} \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)}.$$

Les facteurs additionnels provenant de ces modifications sont tous $O((\log x)^{c_3})$ pour un certain réel $c_3 = c_3(B) > 0$, et cela est absorbé dans le terme d'erreur quitte à diviser par 2 la valeur de δ.

□

3.3 Valeur moyenne de certaines fonctions arithmétiques

On démontre dans cette section le Théorème 3.1. On se place dans un cadre qui regroupe les deux hypothèses possibles sur f : on suppose qu'il existe une fonction $\widetilde{\lambda} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ telle que l'on ait

- $\forall n \in \mathbf{N}$, $|\lambda(n)| \leq B\widetilde{\lambda}(n)$,
- $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $\widetilde{\lambda}(mn) \leq \widetilde{\lambda}(m)\widetilde{\lambda}(n)$,
- $\forall z \geq 2, \sum_{n \leq z} \widetilde{\lambda}(n) \leq Bz(\log z)^B$,
- $\widetilde{\lambda}(n) \leq Bn^{1-\beta}$.

Lorsque $\lambda(n) \leq B$ (resp. λ multiplicative), le choix $\widetilde{\lambda} = \mathbf{1}$ (resp. $\widetilde{\lambda} = |\lambda|$) est admissible. On rappelle que l'on dispose en plus de la majoration (3.3).

Soit $c \geq 2$ un réel. On suppose $(\log x)^c \leq y$. On part de l'expression

$$R_f(x,y) = \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{q \geq 1} \lambda(q)\{\Psi(x,y;1,q) - 1\}$$

obtenue en intervertissant les sommes après avoir utilisé la relation $f(n) = \sum_{q|n} \lambda(q)$. La présence de -1 dans le sommant tient compte du fait que dans la définition de $R_f(x,y)$, on ne somme pas sur l'entier 1 ; cela implique que le sommant est nul pour $q \geq x$.Posons $Q := \lceil (x(\log x)^2/\Psi(x,y))^{1/\beta} \rceil$. On a $\Psi(x,y) = x^{\alpha+o(1)}$ lorsque $x \to \infty$, donc $Q = x^{(1-\alpha)/\beta+o(1)}$. On a

$$\sum_{q>Q} \lambda(q)\{\Psi(x,y;1,q) - 1\} \ll x \sum_{q>Q} \frac{|\lambda(q)|}{q} \leq BxQ^{-\beta} \leq B\frac{\Psi(x,y)}{(\log x)^2}.$$

On applique la Proposition 3.2 avec le poids $\widetilde{\lambda}$ pour $\vartheta = \beta$. Si η est le réel positif donné par cette proposition, quitte à supposer c suffisamment grand en fonction de β, on a $Q \leq x^\eta$. Par ailleurs $\sum_{q \leq Q} |\lambda(q)| \leq BQ$, on obtient donc

$$\sum_{q \leq Q} \lambda(q) \left\{ \Psi(x,y;1,q) - \frac{1}{\varphi(q)} \Psi_q(x,y) \right\} \ll_B \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.$$

Ainsi,

$$R_f(x,y) = \sum_{q \leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\Psi_q(x,y)}{\Psi(x,y)} + O_B\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{3.13}$$

L'hypothèse sur λ implique

$$\sum_{q > u^{2/\beta}} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\Psi_q(x,y)}{\Psi(x,y)} \ll_{B,\beta} \frac{1}{u}$$

puisque $1/\varphi(q) \ll_\beta q^{-1+\beta/2}$. Lorsque c est supposé assez grand en fonction de β, les conditions de l'estimation (3.8) du Lemme C sont vérifiées avec $m = q$ pour tout $q \leq u^{2/\beta}$, et on a uniformément

$$\Psi_q(x,y) = g_q(\alpha)\Psi(x,y) \left\{ 1 + O\left(\frac{E_q(1+E_q)}{u} \right) \right\}$$

où E_q vérifie (3.9). Lorsque $q \to \infty$, on a $\vartheta_q = o((\log q)/\log y)$ et $\log(u+2)/(\log y) \ll 1$, donc $E_q = q^{o(1)}$, ainsi

$$\sum_{q \leq u^{2/\beta}} \frac{|\lambda(q)| E_q(1+E_q)}{\varphi(q)} \ll_{B,\beta} 1$$

donc

$$\begin{aligned} R_f(x,y) &= \sum_{q\le u^{2/\beta}} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= \sum_{q\ge 1} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

ce qui montre l'estimation (3.4).

Supposons d'abord $y \le \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$, de sorte que $1/u \ll \log(u+1)/\log y$. On a $\sup_{\beta\in[\alpha,1]} |g_q'(\beta)| \ll \log q$, ainsi $g_q(\alpha) = g_q(1) + O((\log q)(1-\alpha))$ et

$$R_f(x,y) = \sum_{q\ge 1} \frac{\lambda(q)}{q} + O_{B,\beta}(1-\alpha) + O_{B,\beta}\left(\frac{1}{u}\right)$$

ce qui fournit (3.5) grâce par exemple à [Ten07, formule III.5.74].

Il reste à montrer l'estimation (3.5) lorsque $y \ge \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$. On reprend l'étude précédente à partir de la formule (3.13). Pour tout $q \in \mathbf{N}$, on note

$$q_y := \prod_{\substack{p^\nu \| q\\ p\le y}} p^\nu$$

le plus grand diviseur y-friable de q. On a $\Psi_q(x,y) = \Psi_{q_y}(x,y)$ et $\omega(q_y) \le \log x \le \sqrt{y}$, l'estimation (3.10) du Lemme C fournit donc

$$R_f(x,y) = \sum_{q\le Q} \frac{\varphi(q_y)\lambda(q)}{q_y\varphi(q)} + O_B\Big(\frac{1}{\log x} + \sum_{q\in\mathbf{N}} \frac{2^{\omega(q)}\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big).$$

On a $2^\omega(q)q/\varphi(q) \ll_\beta q^\beta$, l'hypothèse (3.3) sur λ montre que le terme d'erreur est $O_{B,\beta}(\log(u+1)/\log y)$. Par ailleurs, on remarque que

$$\sum_{q\le Q} \frac{\varphi(q_y)\lambda(q)}{q_y\varphi(q)} = \sum_{q\ge 1} \frac{\lambda(q)}{q} + O\Big(\sum_{q>\min\{Q,y\}} \frac{|\lambda(q)|}{\varphi(q)}\Big)$$

et le terme d'erreur est $O_{B,\beta}(y^{-\beta/2} + Q^{-\beta/2}) = O_{B,\beta}(\log(u+1)/\log y)$ par construction de Q. Cela montre l'estimation (3.5) lorsque $y \ge \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$ et complète la démonstration du Théorème 3.1.

3.4 Théorème d'Erdös-Kác sur les friables translatés

On démontre dans cette section le Théorème 3.2. On reprend la preuve de Fouvry et Tenenbaum [FT96], avec deux changements notables : le choix du paramètre Y et l'utilisation de la majoration (3.20) *infra.* Lorsque $y \ge \exp\{\log x/(\log_2 x)^2\}$, le corollaire 5 de [FT96] s'applique, on peut donc supposer $y \le \exp\{\log x/(\log_2 x)^2\}$. En particulier $H(u)^{-\delta} \ll_\delta 1/\log x$. La Proposition 3.2 appliquée avec $\vartheta = 1/2$ et $\widetilde{\lambda}(n) = \tau(n)^3$ où $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ (l'hypothèse (ii) étant satisfaite avec $B = 7$) fournit, pour un réel positif δ et quitte à augmenter la valeur de c, l'estimation

$$\sum_{q\le Q} \tau(q)^3 \max_{(a,q)=1} \left| \Psi(x,y;a,q) - \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)} \right| \ll \Psi(x,y)\left(H(u)^{-\delta} + y^{-\delta}\right) + \sqrt{\Psi(x,y)}Q^{9/8}(\log x)^{7/2} \tag{3.14}$$

uniformément lorsque $2 \le (\log x)^c \le y \le x$ et $Q \le \sqrt{\Psi(x,y)}$. Il sera fait usage du résultat suivant, qui est issu de [Lan89, Lemma].

Lemme D. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a*

$$\tau(n) \ll \sum_{d|n, d \le n^{1/3}} \tau(d)^3.$$

On pose $Y := \exp\{(\log x)/(\log_2 x)^c\}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\omega(n, Y) := \sum_{p|n, p \le Y} 1$. Pour tout $\kappa \in \mathbf{R}$, on a

$$\text{card }\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1) - \omega(n-1,Y) > \kappa\} \le 2^{-\kappa} \sum_{n \in S^*(x,y)} 2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)}.$$

Or on a grâce au Lemme D

$$2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)} \le \sum_{\substack{d|n-1 \\ P^-(d)>Y}} 1 \ll \sum_{\substack{d|n-1, d \le x^{1/3} \\ P^-(d)>Y}} \tau(d)^3$$

où $P^-(d)$ désigne le plus petit facteur premier de l'entier $d > 1$ (avec $P^-(1) = \infty$). Une interversion de sommation fournit

$$\text{card }\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1) - \omega(n-1,Y) > \kappa\} \ll 2^{-\kappa} \sum_{\substack{d \le x^{1/3} \\ P^-(d)>Y}} \tau(d)^3 \Psi(x,y;1,d). \quad (3.15)$$

Quitte à augmenter la valeur de c pour avoir $x^{3/4} \le \Psi(x,y)/(\log x)^8$, la formule (3.14) avec $Q = x^{1/3}$ et les calculs de [FT96] (formule précédant la formule (7.6)) montrent que le membre de droite de (3.15) est

$$\ll 2^{-\kappa} \sum_{\substack{d \le x^{1/3} \\ P^-(d)>Y}} \frac{\tau(d)^3 \Psi_d(x,y)}{\varphi(d)} + O(2^{-\kappa}\Psi(x,y)) \ll 2^{-\kappa}(\log_2 x)^c \Psi(x,y).$$

Le choix $\kappa = c_1 \log_3 x$ pour $c_1 > 0$ fixé suffisamment grand en fonction de c assure que cela est $\ll \Psi(x,y)/\sqrt{\log_2 x}$.

On pose $\xi := \log_2 Y = \log_2 x + O(\log_3 x)$ et

$$\Psi^*(x,y;t) := \text{card }\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1,Y) \le \xi + t\sqrt{\xi}\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \Psi(x,y;t) &= \text{card }\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1,Y) \le \log_2 x + t\sqrt{\log_2 x}\} + O\Big(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}} \Psi(x,y)\Big) \\ &= \Psi^*(x,y;\widetilde{t}\,) + O\Big(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}} \Psi(x,y)\Big) \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour un certain réel $\widetilde{t}$ vérifiant $\widetilde{t} = t + O((1+|t|)\log_3 x/\sqrt{\log_2 x})$. On a

$$\Phi(\widetilde{t}) = \Phi(t) + O(\log_3 x/\sqrt{\log_2 x}),$$

il suffit donc de montrer l'estimation (3.7) avec $\Psi(x,y;t)$ remplacé par $\Psi^*(x,y;t)$. De même que dans [FT96], on fait appel à l'inégalité de Berry-Esseen sous la forme énoncée dans [Ten07, théorème II.7.16] :

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \Big| \frac{\Psi^*(x,y;t)}{\Psi(x,y)} - \Phi(t) \Big| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \int_0^{\sqrt{\xi}} |R(x,y;\vartheta)| \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} \quad (3.17)$$

avec

$$R(x,y;\vartheta) := \Big(\frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S^*(x,y)} \mathrm{e}^{i\vartheta(\omega(n-1,Y)-\xi)/\sqrt{\xi}}\Big) - \mathrm{e}^{-\vartheta^2/2}$$

en remarquant que $R(x,y;-\vartheta) = \overline{R(x,y;\vartheta)}$. On fixe $\vartheta \in [0,\sqrt{\xi}]$.

Suivant les calculs de [FT96, formule (7.10)], on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \vartheta^2 + \vartheta\Big(\frac{1}{\xi\Psi(x,y)}\sum_{n\in S^*(x,y)} (\omega(n-1,Y)-\xi)^2\Big)^{1/2}. \tag{3.18}$$

On a

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} \omega(n-1,Y) = \sum_{p\le Y} \Psi(x,y;1,p) + O(Y/\log Y),$$

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} \omega(n-1,Y)^2 = \sum_{p\le Y} \Psi(x,y;1,p) + \sum_{\substack{p,q\le Y\\ p\neq q}} \Psi(x,y;1,pq) + O(Y^2/\log^2 Y).$$

Quitte à augmenter la valeur de c, pour x assez grand on a $Y \le \sqrt{\Psi(x,y)}$, ainsi d'après [Har12a, theorem 1] on a

$$\sum_{p\le Y} \Psi(x,y;1,p) = \sum_{p\le Y} \frac{\Psi_p(x,y)}{p-1} + O(\Psi(x,y)) = \xi\Psi(x,y) + O(\Psi(x,y))$$

où l'on a utilisé $\Psi_p(x,y) = \Psi(x,y)\{1+O(1/p^\alpha+1/u)\}$ pour tout $p\le Y$, grâce à [dlBT05b, théorème 2.1] si $p\le y$, l'égalité étant triviale sinon. De même,

$$\sum_{\substack{p,q\le Y\\ p\neq q}} \Psi(x,y;1,pq) = \xi^2\Psi(x,y) + O(\xi\Psi(x,y)).$$

On a donc en développant,

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} (\omega(n-1,Y)-\xi)^2 = O(\xi\Psi(x,y))$$

et en reportant cela dans (3.18), on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \vartheta + \vartheta^2. \tag{3.19}$$

On montre ensuite une estimation plus précise que la précédente pour les valeurs de ϑ loin de 0. Pour tout $m\in\mathbf{N}$, on a $\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(m,Y)} = \sum_{d|m,P(d)\le Y} f_\vartheta(d)$ avec

$$f_\vartheta(d) := \mu^2(d)(\mathrm{e}^{i\vartheta/\sqrt{\xi}}-1)^{\omega(d)} = O(\mu^2(d)\mathrm{e}^{-c_2\omega(d)})$$

pour un certain $c_2>0$, puisque $\vartheta/\sqrt{\xi}\le 1<\pi/3$. Lorsque $\mu^2(d)=1$, on a $d\le P(d)^{\omega(d)}$: on a donc pour tout $m\in\mathbf{N}$

$$\sum_{\substack{d|m,P(d)\le Y\\ d>x^{1/3}}} f_\vartheta(d) \ll \mathrm{e}^{-c_3\log x/\log Y}\tau(m) \ll \mathrm{e}^{-c_3(\log_2 x)^c} \sum_{d|m,d\le m^{1/3}} \tau(d)^3 \tag{3.20}$$

pour un certain $c_3 > 0$, où l'on a utilisé le Lemme D. Une interversion de sommation fournit

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S^*(x,y)}\sum_{\substack{d|n-1,P(d)\leq Y\\ d>x^{1/3}}} f_\vartheta(d) &\ll \mathrm{e}^{-c_3(\log_2 x)^c}\sum_{d\leq x^{1/3}}\tau(d)^3\Psi(x,y;1,d)\\ &\ll \mathrm{e}^{-c_3(\log_2 x)^c}\prod_{p\leq x}\Big(1+\frac{8}{p}\Big)\Psi(x,y)\ll\frac{\Psi(x,y)}{\log x}.\end{aligned}$$

D'autre part, étant donné que $f_\vartheta(d)\ll 1$, le théorème 1 de [Har12a] (ou la Proposition 3.2 pour $\widetilde{\lambda}=\mathbf{1}$) fournit, quitte à augmenter la valeur de c,

$$\sum_{d\leq x^{1/3}} f_\vartheta(d)\left\{\Psi(x,y;1,d)-\frac{\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)}\right\}\ll\frac{\Psi(x,y)}{\log x}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S^*(x,y)}\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} &= \sum_{d\leq x^{1/3},P(d)\leq Y} f_\vartheta(d)\Psi(x,y;1,d)+O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\right)\\ &= \sum_{d\leq x^{1/3},P(d)\leq Y}\frac{f_\vartheta(d)\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)}+O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\right).\end{aligned}\tag{3.21}$$

La contribution à la dernière somme des d vérifiant $\omega(d)\geq\sqrt{y}$ est majorée par

$$O(\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{y}}(\log x)\Psi(x,y))=O(\Psi(x,y)/\log x).$$

Lorsque $\omega(d)\leq\sqrt{y}$, en notant $m=m(d)$ le plus grand diviseur y-friable de d, l'estimation (3.8) du Lemme C fournit

$$\Psi_d(x,y)=\Psi_m(x,y)=g_m(\alpha)\Psi(x,y)\left\{1+O\left(\frac{E_m(1+E_m)}{u}\right)\right\}\tag{3.22}$$

$$\text{avec}\quad E_m=O\Big((\log u)^{-1}\gamma_m\exp\{2\gamma_m\}\Big)=O\left(\frac{\omega(d)}{\log y}\right)$$

et où $g_m(\beta)$ est défini en (3.2). On a en effet $\gamma_m\leq\log(\omega(m)+2)/4$ quitte à supposer c suffisament grand. On reporte l'estimation (3.22) dans (3.21) : le terme d'erreur induit est dominé par

$$\frac{\Psi(x,y)}{u\log y}\sum_{P(d)\leq Y}\frac{|f_\vartheta(d)|\omega(d)^2}{\varphi(d)}\ll\Psi(x,y)\frac{\log Y}{\log x}=\frac{\Psi(x,y)}{(\log_2 x)^c}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S^*(x,y)}\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} &= \Psi(x,y)\sum_{\substack{d\leq x^{1/3},P(d)\leq Y\\ \omega(d)\leq\sqrt{y}}}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)}+O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\right)\\ &= \Psi(x,y)\sum_{d\leq x^{1/3},P(d)\leq Y}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)}+O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\sum_{d>x^{1/3},P(d)\leq Y}\frac{|f_\vartheta(d)|}{\varphi(d)}\ll\int_{x^{1/3}}^\infty\frac{d\Psi(z,Y)}{z}\ll(\log Y)\mathrm{e}^{-(\log x)/6\log Y}\ll\frac{1}{\log x}.$$

On obtient donc

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} = \Psi(x,y)\sum_{P(d)\le Y}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\right).$$

Quitte à supposer c assez grand on a $\sum_p p^{-1-\alpha} \ll 1$, et les calculs de [FT96] (en particulier ceux menant à la formule (7.16)) montrent que le terme principal du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}&\Psi(x,y)\ \exp\{(\mathrm{e}^{i\vartheta/\sqrt{\xi}}-1)\xi + O(\vartheta/\sqrt{\xi})\}\\ &= \begin{cases}\Psi(x,y)\mathrm{e}^{i\vartheta\sqrt{\xi}-\vartheta^2/2}\{1+O((\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi})\} & \text{si } 0\le\vartheta\le\xi^{1/6}\\ O(\Psi(x,y)\mathrm{e}^{-c_4\vartheta^2}) = O(\Psi(x,y)/\xi) & \text{si } \xi^{1/6}\le\vartheta\le\sqrt{\xi}\end{cases}\end{aligned}$$

pour un certain $c_4>0$, on a donc, en notant que $\log_2 x\sim\xi$,

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases}\mathrm{e}^{-\vartheta^2/2}(\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi}+1/\xi & \text{si } 0\le\vartheta\le\xi^{1/6}\\ 1/\xi & \text{si } \xi^{1/6}\le\vartheta\le\sqrt{\xi}\end{cases} \tag{3.23}$$

En regroupant les estimations (3.19) et (3.23) on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases}\vartheta & \text{si } 0\le\vartheta\le 1/\xi\\ \mathrm{e}^{-\vartheta^2/2}(\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi}+1/\xi & \text{si } 1/\xi\le\vartheta\le\sqrt{\xi}.\end{cases}$$

En injectant dans (3.17), cela fournit finalement

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\frac{\Psi^*(x,y;t)}{\Psi(x,y)}-\Phi(t)\right| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Cela démontre le Théorème 3.2 grâce à l'estimation (3.16).

Chapitre 4

Théorèmes de type Fouvry–Iwaniec pour les entiers friables

4.1 Introduction

Un entier n est dit *y-friable* si son plus grand facteur premier $P(n)$ est inférieur ou égal à y, avec la convention $P(1) = 1$. L'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x qui sont y-friables est noté $S(x, y)$, et on pose $\Psi(x, y) = \text{card } S(x, y)$. L'étude de $S(x, y)$ fait l'objet d'abondantes études, les outils variant selon la taille de y par rapport à x : on réfère le lecteur aux articles de survol [HT93]. On s'intéresse ici à la répartition de $S(x, y)$ dans les progressions arithmétiques. On définit

$$\Psi(x, y; a, q) := \text{card } \{n \in S(x, y) \mid n \equiv a \pmod{q}\},$$

$$\Psi_q(x, y) := \text{card } \{n \in S(x, y) \mid (n, q) = 1\}.$$

Harper [Har12b], précisant un résultat de Soundararajan [Sou08], montre que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, lorsque $(a, q) = 1$,

$$\Psi(x, y; a, q) \sim \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \quad (\log x/\log q \to \infty, q \leq y^{4\sqrt{e}-\varepsilon}, y \geq y_0(\varepsilon)). \tag{4.1}$$

Soundararajan conjecture que cette estimation a lieu pour tout $A > 0$ fixé lorsque $q \leq y^A$. Comme il est noté dans [Gra93b] et [Sou08], établir cette estimation pour un $A > 4\sqrt{e}$ aurait des conséquences intéressantes sur le problème du plus petit résidu non quadratique modulo p, au sujet duquel on réfère le lecteur aux travaux de Burgess [Bur57].

La situation présente des similarités avec la suite des entiers premiers : s'il est délicat de majorer le terme

$$E(x, y; a, q) := \Psi(x, y; a, q) - \frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x, y)$$

uniformément dans un large domaine en x, y et q, on peut espérer obtenir des résultats en moyenne, du même type que le résultat de Bombieri–Vinogradov, c'est-à-dire des majorations de la somme

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} |E(x, y; a, q)|.$$

Dans la plupart des applications, et plus particulièrement celles liées aux techniques de crible, ce sont ces objets qui interviennent. La question de l'uniformité en Q est cruciale.

On définit les quantités suivantes, qui interviennent fréquemment dans l'étude des entiers friables :

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \qquad H(u) := \exp\{u/(\log(u+1))^2\}.$$

Harper [Har12a], précisant des résultats de Fouvry–Tenenbaum [FT96], Granville [Gra93a] et Wolke [Wol73], montre qu'il existe $c, \delta > 0$ tels que pour tout $A \geq 0$, lorsque $(\log x)^c \leq y \leq x$ et $Q \leq \sqrt{\Psi(x,y)}$, on ait

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} |E(x,y;a,q)| \ll_A \Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta}\} + Q\sqrt{\Psi(x,y)}(\log x)^{7/2}. \tag{4.2}$$

La constante implicite est effective si $A < 1$ [1]. Dans les applications, il est important que le majorant soit $o(\Psi(x,y))$, et le résultat de Harper assure cela dès que $Q = o(\sqrt{\Psi(x,y)}(\log x)^{-7/2})$. De même que dans la situation du théorème de Bombieri–Vinogradov, il serait très intéressant d'avoir un majorant qui soit $o(\Psi(x,y))$ lorsque Q est de l'ordre de $\sqrt{x}$.

Dans le contexte des nombres premiers et du théorème de Bombieri–Vinogradov, de tels résultats peuvent être obtenus si l'on fixe l'entier a dont on détecte la classe de congruence. Cela trouve son origine dans des travaux de Fouvry–Iwaniec et Fouvry [FI80, Fou82, Fou84] et est étudié par Bombieri–Friedlander–Iwaniec dans une série d'articles [BFI86, BFI87, BFI89]. Il est par exemple montré dans [BFI87, main theorem] que pour tout $a \neq 0$ et $A > 0$, il existe $B = B(A)$ tel que l'on ait

$$\sum_{\substack{q \leq \sqrt{x}(\log x)^A \\ (q,a)=1}} \Big|\pi(x;a,q) - \frac{\mathrm{li} x}{\varphi(q)}\Big| \ll_{a,A} x\frac{(\log\log x)^B}{(\log x)^2}$$

où $\pi(x;a,q)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x et congrus à a modulo q. On pourra consulter l'article de Fiorilli [Fio12] pour plus de références et des résultats récents à ce sujet.

Fouvry et Tenenbaum [FT96, théorèmes 2 et 3] montrent par des méthodes similaires le résultat suivant.

Théorème A. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que lorsque $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et $1 \leq y \leq x^\delta$, pour tout $A > 0$, on ait*

$$\sum_{\substack{q \leq x^{3/5-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} |E(x,y;a,q)| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \qquad (|a| \leq x^\delta), \tag{4.3}$$

$$\sum_{\substack{q \leq x^{6/11-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} |E(x,y;a,q)| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \qquad (|a| \leq x).$$

Il est intéressant dans ce résultat que q est autorisé à prendre des valeurs de l'ordre de $\sqrt{x}$. En revanche, le majorant n'est $O(\Psi(x,y))$ que dans un domaine du type

$$\exp\Big\{(\eta + o(1))\frac{\log x \log\log\log x}{\log\log x}\Big\} \leq y$$

lorsque $x \to \infty$ et pour un certain $\eta = \eta(A)$, ce qui restreint l'uniformité en x et y dans les applications. On montre ici le résultat suivant.

1. Cela découle par exemple de la proposition II.8.30 de [Ten07]

Théorème 4.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $c, \delta > 0$ pouvant dépendre de ε tels que lorsque $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$, pour tout $A \geq 0$, on ait*

$$\sum_{\substack{q \leq x^{3/5-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} |E(x, y; a, q)| \ll_A \Psi(x, y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta}\} \qquad (|a| \leq x^{\delta}), \tag{4.4}$$

$$\sum_{\substack{q \leq x^{6/11-\varepsilon} \\ (q,a)=1}} |E(x, y; a, q)| \ll_A \Psi(x, y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta}\} \qquad (|a| \leq x^{1-\varepsilon}), \tag{4.5}$$

où la constante implicite est effective si $A < 1$.

Les majorants dans (4.4) et (4.5) sont toujours $o(\Psi(x, y))$ lorsque $x, y \to \infty$ et $A > 0$ dans leur domaine de validité. Par rapport aux précédents exemples de suites ayant un exposant de répartition supérieur à $1/2$ pour une classe de congruence fixée, la suite d'entiers $S(x, (\log x)^c)$ est particulièrement peu dense puisque $\Psi(x, (\log x)^c) = x^{1-1/c+o(1)}$ lorsque $x \to \infty$ (voir la formule (4.6) *infra*).

Ce résultat permet par exemple d'estimer la somme

$$T(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n > 1}} \tau(n - 1).$$

Ce problème peut être vu comme un analogue friable du problème des diviseurs de Titchmarsh (*cf.* le corollary 1 de [BFI86] et le corollaire 2 de [Fou85]). Il est étudié par Fouvry et Tenenbaum dans [FT90], qui obtiennent en particulier le résultat suivant. Dans toute la suite, on désigne par $\log_k x$ la k-ième itérée du logarithme évalué en x.

Théorème B. *Soit $\eta > 0$. Lorsque x et y sont suffisamment grands et vérifient l'inégalité $\exp\{\eta \log x \log_3 x / \log_2 x\} \leq y \leq x$, on a*

$$T(x, y) = \Psi(x, y) \log x \Big\{1 + O\Big(\frac{\log(u + 1)}{\log y}\Big)\Big\}.$$

L'énoncé de notre résultat fait intervenir une notation de [HT86]. Lorsque $2 \leq y \leq x$, on définit implicitement le *point-selle* $\alpha(x, y) \in [0, 1]$ par l'équation

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^{\alpha} - 1} = \log x.$$

Lorsque $x, y \to \infty$ avec $(\log x)^2 \leq y \leq x$, on a $1-\alpha \sim \log(u+1)/\log y$, et lorsque $x, y \to \infty$, on a

$$\Psi(x, y) = x^{\alpha + o(1)}. \tag{4.6}$$

Théorème 4.2. *Il existe $c > 0$ tel que lorsque $(\log x)^c \leq y \leq x$, on ait*

$$T(x, y) = C(\alpha)\Psi(x, y) \log x \Big\{1 + O\Big(\min\Big\{\frac{1}{u}, \frac{\log(u + 1)}{\log y}\Big\}\Big)\Big\} \tag{4.7}$$

avec

$$C(\alpha) := \prod_p \Big(1 - \frac{p^{-\alpha} - p^{-1}}{p - 1}\Big).$$

Remarque 4.1. Le terme d'erreur $O(1/u)$ est typique de l'utilisation de la méthode du col dans l'étude des entiers friables. On a $C(\alpha) \asymp 1$, ainsi que

$$C(\alpha) = 1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big),$$

et pour tout $c > 0$, on a $1/u \gg \log(u+1)/\log y$ lorsque $\log y \gg \sqrt{\log x \log_2 x}$.

La constante implicite dans l'estimation (4.7) obtenue par la méthode proposée ici est effective lorsque $H(u)^\delta \gg \log y/\log(u+1)$, ce qui est réalisé par exemple lorsque $\log y \ll \log x/(\log_2 x(\log_3 x)^2)$.

La dépendance du terme principal en α est due à un biais dans la répartition des entiers friables dans les progressions arithmétiques, biais d'autant plus important que α (donc y) est petit. Par exemple, un entier y-friable choisi au hasard entre 1 et x est pair avec une probabilité $2^{-\alpha} + o(1)$ lorsque $x \to \infty$, *cf.* le Lemme 4.1 *infra*.

De même que dans [FT90], la preuve que l'on présente ici permet l'obtention d'un développement de $T(x, y)$ selon les puissances négatives de $\log y$. On définit le domaine

$$3 \le \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \le y \le x. \tag{H_ε}$$

Pour tout $k \ge 0$ fixé, il existe des fonctions $(u \mapsto \sigma_i(u))_{i\ge0}$, définies sur $[1, \infty[$ par la formule (1.12) de [FT90] (en particulier $\sigma_0(u) = \rho(u)$), telles qu'en posant pour tout $z > 1$,

$$\mathcal{C}(z) = \mathcal{C}_k(z) := \bigcup_{j=0}^{k} [j + \min\{1, (k+1-j)\log z/z\}, j+1] \cup [k+1, \infty[,$$

on ait pour $(x, y) \in (H_\varepsilon)$ et $u \in \mathcal{C}((\log y)/2)$ l'estimation

$$T(x, y) = x \log x\Big\{\sum_{j=0}^{k} \frac{\sigma_j(u)}{(\log y)^j} + O_{\varepsilon,k}\Big(\frac{|\rho^{(k+1)}(u)|}{(\log y)^{k+1}}\Big)\Big\}.$$

Remerciements. L'auteur tient à exprimer sa plus profonde reconnaissance à son directeur Régis de la Bretèche et à Étienne Fouvry pour leurs conseils, leurs encouragements et leurs relectures durant la rédaction de ce travail.

4.2 Lemmes

4.2.1 Entiers friables

Dans [Hil86], Hildebrand étudie la fonction $\Psi(x, y)$ en itérant une équation fonctionelle. On définit la fonction de Dickman $\rho(u)$ pour tout $u \ge 0$ par

$$\rho'(u) + u\rho(u-1) = 0, \quad (u \ge 1)$$

avec la condition initiale $\rho(u) = 1$ pour $u \in [0, 1]$. On prolonge ρ à $\mathbf{R}$ par $\rho(u) = 0$ pour $u < 0$. Lorsque $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, on a

$$\Psi(x, y) = x\rho(u)\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{4.8}$$

Le terme d'erreur est optimal pour le terme principal $x\rho(u)$. Saias [Sai89] montre que l'on peut préciser cette estimation au prix d'un terme principal faisant intervenir la fonction ρ de façon plus fine. On définit pour $2 \le y \le x$,

$$\Lambda(x, y) := \begin{cases} x\int_{0-}^{+\infty} \rho(u-v)\mathrm{d}(\lfloor y^v\rfloor/y^v) & \text{si } x \notin \mathbf{Z} \\ \Lambda(x+0, y) & \text{sinon,} \end{cases}$$

ainsi que $L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}$. Lorsque $(x,y) \in H_\varepsilon$, on a

$$\Psi(x,y) = \Lambda(x,y)\{1 + O(L_\varepsilon(y)^{-1})\}.$$

Le domaine de validité de l'estimation (4.8) a un lien direct avec le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers. Ainsi, la forme du domaine (H_ε) est liée à la région sans zéro de Vinogradov–Korobov [Ten07, formule (II.3.64)] tandis que Hildebrand [Hil84] montre que la validité de l'estimation

$$\Psi(x,y) = x\rho(u)O_\varepsilon(y^\varepsilon), \qquad ((\log x)^{2+\varepsilon} \leq y)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ est équivalente à l'hypothèse de Riemann.

Si l'on concède de travailler avec un terme principal dépendant moins explicitement de x et y, il est possible d'obtenir une estimation valable dans un domaine beaucoup plus étendu. On pose pour $s \in \mathbf{C}, \mathfrak{Re}\, s > 0$,

$$\zeta(s,y) := \prod_{p \leq y}(1 - p^{-s})^{-1}, \quad \phi_2(s,y) := \sum_{p \leq y} \frac{p^s(\log p)^2}{(p^s-1)^2}.$$

Alors Hildebrand et Tenenbaum [HT86, theorem 1] montrent que lorsque $2 \leq y \leq x$, on a

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\phi_2(\alpha,y)}}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\Big)\Big). \tag{4.9}$$

La quantité $\phi_2(\alpha,y)$ vérifie lorsque $2 \leq y \leq x$ l'estimation (*cf.* [HT86, theorem 2])

$$\phi_2(\alpha,y) = \Big(1 + \frac{\log x}{y}\Big)\log x \log y\Big(1 + O\Big(\frac{1}{\log(u+1)} + \frac{1}{\log y}\Big)\Big).$$

La démonstration de Hildebrand et Tenenbaum de l'estimation (4.9) emploie la méthode du col. Celle-ci offre la possibilité d'obtenir des résultats “locaux”, permettant par exemple l'évaluation du rapport $\Psi(x/d,y)/\Psi(x,y)$ dans des domaines en x, y et d où aucune approximation lisse de $\Psi(x,y)$ n'est connue voire possible. Cela est étudié par La Bretèche et Tenenbaum dans [dlBT05b]. Afin de citer leurs résultats on introduit quelques notations supplémentaires. On définit pour tout $m \in \mathbf{N}$, $g_m(\alpha) := \prod_{p|m}(1 - p^{-\alpha})$ et, par analogie avec la fonction $\Lambda(x,y)$,

$$\Lambda_m(x,y) := x\int_{0-}^{+\infty} \rho(u-v)\mathrm{d}R_m(y^v)$$

avec $R_m(t) := t^{-1}\sum_{n \leq t, (n,m)=1} 1 - \varphi(m)/m$. Le résultat suivant découle des théorème 2.4, 2.1 et de la formule (4.1) de [dlBT05b].

Lemme 4.1. *(i) Lorsque* $2 \leq y \leq x$ *et* $1 \leq d \leq x$, *on a*

$$\Psi\Big(\frac{x}{d},y\Big) \ll \frac{1}{d^\alpha}\Psi(x,y).$$

(ii) Lorsque $(\log x)^2 \leq y \leq x$, $P^+(m) \leq y$ *et* $\omega(m) \ll \sqrt{y}$, *on a*

$$\Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{E_m(1+E_m)}{u}\Big)\Big\},$$

où, en notant $\gamma_m := \log(\omega(m)+1)\log(u+1)/\log y$, *la quantité* E_m *vérifie*

$$E_m \ll (\log(u+1))^{-1}\{\exp(2\gamma_m) - 1\}$$

(iii) Lorsque $(x, y) \in H_\varepsilon$, $x \geq 3$ *et* $P^+(m) \leq y$, *on a*

$$\Psi_m(x, y) = \Lambda_m(x, y) + O\Big(\frac{\Psi(x, y)}{L_\varepsilon(y) g_m(\alpha)}\Big).$$

Remarque 4.2. La Bretèche et Tenenbaum [dlBT05b, formule (2.22)] montrent en fait une estimation pour le rapport $\Psi(x/d, y)/\Psi(x, y)$ pour un large domaine en les paramètres x, y, d. On ne fera usage ici que de la majoration énoncée au point (i).

4.2.2 Méthode de dispersion

On reprend dans ce travail la méthode adoptée dans [FI83, BFI86], basée sur un calcul de “dispersion” d'après Linnik, et qui correspond à un calcul de variance empirique. La méthode peut être résumée de la façon suivante :

(i) on approche la fonction $\mathbf{1}_{k \in S(x,y)}$ par des convolutions de la forme $\sum_{mn\ell = k} \alpha_m \beta_n \lambda_\ell$,

(ii) par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on se ramène au cas où $\alpha_m = f(m)$ est une fonction lisse,

(iii) on détecte la congruence $mn\ell \equiv a \pmod r$ par une formule sommatoire de Poisson, ce qui fait intervenir des sommes de Kloosterman,

(iv) on majore ces sommes, soit individuellement par la majoration de Weil [Wei48], soit en moyenne grâce à des résultats de Deshouillers et Iwaniec [DI83].

Dans tout ce qui suit, on note $\mathrm{e}(z) = \mathrm{e}^{2\pi i z}$.

La transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ intégrable est définie pour tout $\eta \in \mathbf{R}$ par

$$\widehat{f}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \mathrm{e}(\xi \eta) \mathrm{d}\xi.$$

Dans ce qui suit, les fonctions dont on considèrera la transformée de Fourier seront toujours $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On dispose dans ce cas de la formule d'inversion

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\eta) \mathrm{e}(-\xi \eta) \mathrm{d}\eta.$$

Enfin, lorsque f est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-M, M]$ avec $|f^{(j)}| \ll_j M^{-j}$ pour tout $j \geq 0$, alors pour tout $\eta \in \mathbf{R}$ et $j \geq 0$, on a $|\widehat{f}(\eta)| \ll_j M^{1-j} \eta^{-j}$. En particulier, on a

$$\frac{1}{r} \sum_{h \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}} \Big| \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big) \Big| \ll 1 \qquad (r \in \mathbf{N}).$$

Le lemme suivant est une formule sommatoire de Poisson effective, telle que formulée dans [BFI86, lemma 2].

Lemme 4.2. *Soit* $M \geq 1$ *et* $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ *une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact inclus dans* $[-4M, 4M]$, *telle que* $f^{(j)}(x) \ll_j M^{-j}$ *lorsque* $x \in \mathbf{R}_+$ *et* $j \geq 0$. *Alors pour tous* $q, a \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ *et* $H \geq q^{1+\varepsilon} M^{-1}$, *on a*

$$\sum_{m \equiv a \pmod q} f(m) = \frac{1}{q} \sum_{|h| \leq H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{q}\Big) \mathrm{e}(-ah/q) + O_\varepsilon(q^{-1}).$$

Concernant la majoration de sommes de Kloosterman, on dispose du résultat suivant, qui découle de la majoration de Weil [Wei48]. La version énoncée ici est essentiellement le lemme 4 de [Fou82].

Lemme 4.3. *Lorsque $k, b, c, \ell \in \mathbf{N}$ et $D \geq 1$, on a*

$$\sum_{\substack{d \leq D \\ (d,c)=1}} \mathrm{e}\left(b\frac{\overline{d}}{c}\right) \ll \log(D+1)\sqrt{(b,c)}\tau(c)c^{1/2} + \frac{(b,c)}{c}D, \tag{4.10}$$

$$\sum_{\substack{d \leq D \\ (d,ck)=1 \\ d \equiv 0 \pmod{\ell}}} \frac{d}{\varphi(d)}\mathrm{e}\left(b\frac{\overline{d}}{c}\right) \ll \Big(\log(D+1)^2\sqrt{(b,c)}\tau(c)c^{1/2} + \frac{(b,c)\log(\ell+1)}{\ell c}D\Big)2^{\omega(k)}. \tag{4.11}$$

Le résultat suivant, démontré dans [DI83, theorem 12], intervient de façon cruciale. Il s'agit d'une majoration en moyenne de sommes de Kloosterman. Sa démonstration repose sur la théorie des formes automorphes, et des informations sur le spectre du Laplacien agissant sur les formes automorphes sur le quotient du demi-plan de Poincaré par les sous-groupes de congruence, $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ (on réfère le lecteur au chapitre 16 de [IK04] pour plus d'explications à ces sujets). La version que l'on énonce ici correspond au lemma 1 de [BFI86].

Lemme 4.4. *Soit $\varepsilon > 0$ et $g_0 : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ une fonction à support compact. Pour tous réels positifs C, D, N, R, S et toute suite de nombres complexes $(B_{n,r,s})_{(n,r,s)\in\mathbf{N}^3}$, on a*

$$\sum_{R<r\leq 2R}\sum_{S<s\leq 2S}\sum_{1\leq n\leq N} B_{n,r,s} \sum_{\substack{C<c\leq 2C \\ (rd,sc)=1}}\sum_{D<d\leq 2D} g_0\Big(\frac{c}{C},\frac{d}{D}\Big)\mathrm{e}\Big(n\frac{\overline{rd}}{sc}\Big)$$

$$\ll (CDNRS)^{\varepsilon}\{CS(RS+N)(C+DR) + C^2DS\sqrt{(RS+N)R} + D^2NRS^{-1}\}^{1/2}\Big\{\sum_{n,l,r}|B_{n,l,r}|^2\Big\}^{1/2}.$$

La constante implicite dépend au plus de g_0 et ε.

Selberg conjecture que le Laplacien agissant sur $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ n'a aucune valeur propre inférieure à $1/4$ (*cf.* [Sar95] pour plus d'explications à ce sujet). Si cette conjecture est vraie, on peut ignorer le terme $C^2DS\sqrt{(RS+N)R}$ dans la majoration du Lemme 4.4. Cela n'a aucune incidence sur le résultat du Théorème 4.1. Par ailleurs, la majoration du Lemme 4.4 ne dépend pas directement du réel κ tel qu'il soit connu que le spectre du Laplacien est inclus dans $[\kappa,\infty[$. Deshouillers et Iwaniec utilisent à la place des résultats de densité sur le spectre du Laplacien [DI83, theorem 6].

On fera également usage d'une inégalité de grand crible, sous la forme classique suivante (*cf.* le theorem 7.13 de [IK04]).

Lemme 4.5. *Pour tous entiers $Q, M, N \geq 1$ et toute suite $(a_n)_{M<n\leq M+N}$ de nombres complexes, on a*

$$\sum_{q\leq Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi \pmod{q} \\ \chi \text{ primitif}}}\Big|\sum_{M<n\leq M+N} a_n\chi(n)\Big|^2 \leq (N+Q^2-1)\sum_{M<n\leq M+N}|a_n|^2$$

4.3 Démonstration du Théorème 4.1

Dans toute la suite, pour tous $r \in \mathbf{N}$, $k \pmod{r}$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$\omega_\varepsilon(k;r) := \sum_{\substack{\chi \text{ primitif} \\ \mathrm{cond}(\chi)\leq x^{\varepsilon} \\ \mathrm{cond}(\chi)\mid r}} \chi(k) \tag{4.12}$$

où la somme est sur l'ensemble des caractères primitifs de Dirichlet de conducteur inférieur à x^ε et divisant r. En particulier, cela inclut toujours le caractère trivial $\chi = \mathbf{1}$, correspondant au module 1.

Théorème 4.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit, lorsque $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, et lorsque (α_m), (β_n), (λ_ℓ) sont trois suites de nombres complexes de modules inférieurs ou égaux à 1, de supports respectifs dans les entiers de $]M, 2M]$, $]N, 2N]$, $]L, 2L]$, avec $x := MNL$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que lorsque l'un quelconque des deux ensembles de conditions sur M, N, L, R suivants est vérifié :*

$$\begin{cases} |a| \le x^\delta, \qquad x^\varepsilon \le N, \qquad NL \le x^{2/3-5\varepsilon}, \qquad L \le x^{-\varepsilon} M, \\ M \le R \le x^{-\varepsilon} NL, \qquad N^2 L^3 \le x^{1-\varepsilon} R, \qquad N^5 L^2 \le x^{2-\varepsilon}, \qquad N^4 L^3 \le x^{2-\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.13}$$

ou

$$\begin{cases} |a| \le x^{1-\varepsilon}, \qquad NL \le x^{2/3-5\varepsilon}, \\ M \le R \le x^{-\varepsilon} NL, \qquad N^3 L^4 \le x^{2-\varepsilon}, \qquad N^6 L^5 \le x^{4-\varepsilon} R^{-2}, \end{cases} \tag{4.14}$$

on ait la majoration

$$\sum_{\substack{R < r \le 2R \\ (r,a)=1}} \Bigg| \sum_m \sum_n \sum_{\substack{\ell \\ mn\ell \equiv a \pmod r}} \alpha_m \beta_n \lambda_\ell - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_m \sum_n \sum_{\substack{\ell \\ (mn\ell, r)=1}} \alpha_m \beta_n \lambda_\ell \omega_\varepsilon(mn\ell\overline{a}; r) \Bigg| \ll_\varepsilon x^{1-\delta}. \tag{4.15}$$

Ce théorème est à rapprocher du theorem 4 de [BFI86] et du théorème 2 de [Fou82], qui énoncent que la majoration

$$\sum_{\substack{R < r \le 2R \\ (r,a)=1}} \Bigg| \sum_m \sum_n \sum_{\substack{\ell \\ mn\ell \equiv a \pmod r}} \alpha_m \beta_n \lambda_\ell - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_m \sum_n \sum_{\substack{\ell \\ (mn\ell, r)=1}} \alpha_m \beta_n \lambda_\ell \Bigg| \ll_{\varepsilon, A} x/(\log x)^A \tag{4.16}$$

est valable sous les conditions du Théorème 4.3 et sous l'hypothèse supplémentaire que (β_n) est bien répartie dans les progressions arithmétiques de petits modules[2]. Le gain dans la majoration (4.15) par rapport à (4.16) provient du fait que l'on considère uniquement la contribution des caractères de conducteurs $> x^\varepsilon$. Cela est la principale nouveauté de ce travail par rapport à [BFI86] et [Fou82]. Une telle réduction est admissible pour l'application aux entiers friables car il est démontré dans [Har12a] que la contribution des caractères de conducteurs inférieurs à x^ε au membre de gauche de (4.2) est bien contrôlée pour un certain $\varepsilon > 0$ absolu, *cf.* en particulier la formule (3.1) de [Har12a].

Les conditions limitantes pour la taille de R dans le système (4.13) sont heuristiquement

$$R \le x^{-\varepsilon} NL, \qquad N^2 L^3 \le x^{1-\varepsilon} R, \qquad N^4 L^3 \le x^{2-\varepsilon}.$$

Elles impliquent en effet $R \le x^{3/5-8\varepsilon/5}$, et l'égalité est atteinte pour $N = x^{1/5+4\varepsilon/5}$, $L = x^{2/5-7\varepsilon/5}$, $M = x^{2/5+3\varepsilon/5}$. De même, les conditions limitantes pour la taille de R dans le système (4.14) sont

$$R \le x^{-\varepsilon} NL, \qquad N^3 L^4 \le x^{2-\varepsilon}, \qquad N^6 L^5 \le x^{4-\varepsilon} R^{-2},$$

elles impliquent $R \le x^{6/11-\varepsilon}$, et l'égalité est atteinte pour $N = x^{2/11+\varepsilon}$, $L = x^{4/11-\varepsilon}$, $M = x^{4/11}$. Cela est à l'origine des exposants 3/5 et 6/11 dans le Théorème 4.1.

2. Dans [BFI86], les auteurs font d'autres hypothèses simplificatrices, nommément (A_4) et (A_5). Les auteurs mentionnent (p.220) que ces hypothèses ne sont pas cruciales, ce que les calculs du présent travail mettent en évidence.

On remarque que, contrairement à [Fou82, théorème 2] et [BFI86, theorem 4], on ne fait pas d'hypothèse sur la bonne répartition modulo r des suites étudiées. Une hypothèse comme l'hypothèse (A_2) de [BFI86] ne serait pas pertinente dans notre étude puisque l'on considère uniquement la contribution des caractères de grands conducteurs.

La démonstration proposée suit dans une large mesure celles de [Fou82, théorème 2] et [BFI86, theorem 4], On s'inspire des calculs réalisés dans [FI83, section 3] afin de ne pas recourir à certaines hypothèses contraignantes, comme l'hypothèse (A_4) de [BFI86].

On note (u_k) la suite définie pour tout $k \in \mathbf{N}$ par $u_k := \sum_{n\ell=k} \beta_n \lambda_\ell$. Cette suite est à support dans les entiers de $]K, 4K]$ avec $K := NL$, et vérifie $|u_k| \leq \tau(k)$ ainsi que $\sum_k |u_k| \ll K$. On note également

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_\varepsilon := \{\chi \text{ primitif} \mid \mathrm{cond}(\chi) \leq x^\varepsilon\}.$$

On a $|\mathcal{X}| \sim x^{2\varepsilon}/(2\zeta(2)^2)$ lorsque $x \to \infty$, *cf.* [IK04, formule (3.7)].

4.3.1 Calcul de dispersion

On désigne par $\Delta(M, N, L, R)$ le membre de gauche de (4.15). On a par l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\Delta(M,N,L,R)^2 \leq MR \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ (m,r)=1}} \Bigg| \sum_{k \equiv a\overline{m} \pmod r} u_k - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{(k,r)=1} u_k \omega_\varepsilon(mk\overline{a}; r) \Bigg|^2.$$

Étant donnée une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $\Phi_0 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, à support compact inclus dans $[1/2, 3]$ et majorant la fonction indicatrice de l'intervalle $[1, 2]$, on pose $f(m) := \Phi_0(m/M)$. Alors le membre de droite de l'expression précédente est majoré par

$$\begin{aligned} &MR \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \sum_{(m,r)=1} f(m) \Bigg| \sum_{k \equiv a\overline{m} \pmod r} u_k - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{(k,r)=1} u_k \omega_\varepsilon(mk\overline{a}; r) \Bigg|^2 \\ &= MR(\mathcal{S}_1 - 2\,\mathfrak{Re}\,\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3) \end{aligned} \tag{4.17}$$

avec

$$\mathcal{S}_1 := \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \sum_{(m,r)=1} f(m) \Bigg| \sum_{k \equiv a\overline{m} \pmod r} u_k \Bigg|^2,$$

$$\mathcal{S}_2 := \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{(m,r)=1} f(m) \sum_{\substack{(k_1,r)=1 \\ k_2 \equiv a\overline{m} \pmod r}}\sum u_{k_1} \omega_\varepsilon(mk_1\overline{a}; r) \overline{u_{k_2}},$$

$$\mathcal{S}_3 := \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \frac{1}{\varphi(r)^2} \sum_{(m,r)=1} f(m) \Bigg| \sum_{(k,r)=1} u_k \omega_\varepsilon(mk\overline{a}; r) \Bigg|^2.$$

On évalue successivement $\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_2$ puis $\mathcal{S}_1$.

4.3.2 Estimation de $\mathcal{S}_3$

On a

$$\mathcal{S}_3 = \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}} \frac{1}{\varphi(r)^2} \sum_{\substack{\chi_1,\chi_2\in\mathcal{X}\\ \mathrm{cond}(\chi_1)|r\\ \mathrm{cond}(\chi_2)|r}}\sum \overline{\chi_1}\chi_2(a) \sum_{\substack{k_1,k_2\\(k_1k_2,r)=1}}\sum \chi_1(k_1)u_{k_1}\overline{\chi(k_2)u_{k_2}} \sum_{(m,r)=1} f(m)\chi_1\overline{\chi_2}(m).$$

Le Lemme 4.2 permet d'évaluer la somme en m. Notant $H := x^\varepsilon RM^{-1}$, pour tous $\chi_1,\chi_2\in\mathcal{X}$ avec $\mathrm{cond}(\chi_1)|r$ et $\mathrm{cond}(\chi_2)|r$, on a

$$\sum_{(m,r)=1} f(m)\chi_1\overline{\chi_2}(m) = \widehat{f}(0)\sum_{\substack{0<b<r\\(b,r)=1}}\chi_1\overline{\chi_2}(b) + \frac{1}{r}\sum_{0<|h|<H}\widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\sum_{\substack{0<b<r\\(b,r)=1}}\chi_1\overline{\chi_2}(b)\mathrm{e}\Big(\frac{-bh}{r}\Big)+O(1).$$

La somme sur b est une somme de Gauss, pour laquelle on dispose des lemmes 3.1 et 3.2 de [IK04]. Par ailleurs le module de $\chi_1\overline{\chi_2}$ est un diviseur de r qui est inférieur à $x^{2\varepsilon}$. On obtient donc

$$\Big|\sum_{\substack{0<b<r\\(b,r)=1}}\chi_1\overline{\chi_2}(b)\mathrm{e}\Big(\frac{-bh}{r}\Big)\Big| \leq \mathrm{cond}(\chi_1\overline{\chi_2})^{1/2}\sum_{d|(h,r)} d.$$

Ainsi, en utilisant la majoration $\|\widehat{f}\,\|_\infty \ll M$, on a

$$\frac{1}{r}\sum_{0<|h|<H}\widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\sum_{\substack{0<b<r\\(b,r)=1}}\chi_1\overline{\chi_2}(b)\mathrm{e}\Big(\frac{-bh}{r}\Big) \leq \frac{x^\varepsilon}{r}\sum_{d|r} d\sum_{|h|\leq H/d}\Big|\widehat{f}\Big(\frac{dh}{r}\Big)\Big| \ll x^{2\varepsilon}\tau(r).$$

En reportant dans $\mathcal{S}_3$, on obtient

$$\mathcal{S}_3 = \widehat{f}(0)X_3 + R_3 \tag{4.18}$$

avec

$$X_3 := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}}\frac{1}{r}\sum_{\substack{0<b<r\\(b,r)=1}}\Big|\frac{1}{\varphi(r)}\sum_{(k,r)=1}u_k\omega_\varepsilon(k\bar{b};r)\Big|^2,$$

$$R_3 \ll x^{2\varepsilon}|\mathcal{X}|^2\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}}\frac{\tau(r)}{\varphi(r)^2}\Bigg(\sum_{(k,r)=1}|u_k|\Bigg)^2 \ll x^{6\varepsilon}K^2(\log R)R^{-1}.$$

Chacun des deux systèmes de conditions (4.13) et (4.14) implique $K\leq x^{2/3}$, quitte à supposer ε suffisamment petit on obtient $R_3 = O(x^{1-\varepsilon}KR^{-1})$.

4.3.3 Estimation de $\mathcal{S}_2$

On a

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{\chi\in\mathcal{X}}\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1\\ \mathrm{cond}(\chi)|r}}\frac{1}{\varphi(r)}\sum_{(m,r)=1} f(m) \sum_{\substack{(k_1,r)=1\\ k_2\equiv a\overline{m} \pmod r}}\sum \chi(k_1m\overline{a})u_{k_1}\overline{u_{k_2}}.$$

Pour des indices χ, r, m, k_1, k_2 de cette somme, on a $\chi(k_1 m\overline{a}) = \chi(k_1)\overline{\chi(k_2)}$, ainsi

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{\chi\in\mathcal{X}} \sum_{k_1} \chi(k_1)u_{k_1} \sum_{k_2} \overline{\chi(k_2)u_{k_2}} \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,ak_1k_2)=1\\ \mathrm{cond}(\chi)|r}} \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{m\equiv a\overline{k_2} \pmod r} f(m).$$

D'après le Lemme 4.2, en posant $H = x^{\varepsilon}RM^{-1}$, la somme sur m vaut

$$\sum_{m\equiv a\overline{k_2} \pmod r} f(m) = \frac{1}{r}\sum_{|h|\leq H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}(-ah\overline{k_2}/r) + O_{\varepsilon}(1/r).$$

En isolant la contribution du terme d'indice $h = 0$ et en reportant cela dans $\mathcal{S}_2$, on obtient :

$$\mathcal{S}_2 = \widehat{f}(0)X_2 + R_2 + O(|\mathcal{X}|K^2R^{-1})$$

avec

$$X_2 := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,a)=1}} \frac{1}{r\varphi(r)} \sum_{\substack{(k_1,r)=1\\ (k_2,r)=1}}\sum u_{k_1}\overline{u_{k_2}}\omega_{\varepsilon}(k_1\overline{k_2};r),$$

$$R_2 := \sum_{\chi\in\mathcal{X}} \sum_{k_1} \chi(k_1)u_{k_1} \sum_{k_2} \overline{\chi(k_2)u_{k_2}} \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,ak_1k_2)=1\\ \mathrm{cond}(\chi)|r}} \frac{1}{r\varphi(r)} \sum_{1\leq|h|\leq H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(\frac{-ah\overline{k_2}}{r}\Big).$$

Les entiers k_2 et r étant premiers entre eux, on a l'égalité

$$\frac{\overline{k_2}}{r} \equiv -\frac{\overline{r}}{k_2} + \frac{1}{k_2 r} \pmod 1.$$

On a donc

$$R_2 \leq R^{-2}\sum_{\chi\in\mathcal{X}}\sum_{k_1,k_2}\sum |u_{k_1}u_{k_2}| \sum_{1\leq|h|\leq H}\Bigg| \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,ak_1k_2)=1\\ \mathrm{cond}(\chi)|r}} \frac{r}{\varphi(r)}\widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(ah\frac{\overline{r}}{k_2} - \frac{ah}{rk_2}\Big)\Bigg|. \tag{4.19}$$

On effectue une intégration par parties afin d'éliminer le terme $\widehat{f}(h/r)\mathrm{e}(-ah/(rk_2))$. Le membre de droite de (4.19) s'écrit

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}}\Big|\sum_{R<r\leq 2R} g_1(z,r)g_2(z,r)\Big|$$

où on a posé

$$\mathcal{Z} := \big\{(\chi,k_1,k_2,h) \mid \chi\in\mathcal{X}, R<r\leq 2R, (r,ak_1k_2)=1, 1\leq|h|\leq H, \mathrm{cond}(\chi)|r\big\}$$

et pour tout $z = (\chi,k_1,k_2,h)\in\mathcal{Z}$,

$$g_1(z,r) := \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(-\frac{ah}{rk_2}\Big), \qquad g_2(z,r) := \frac{r}{\varphi(r)}\mathrm{e}\Big(ah\frac{\overline{r}}{k_2}\Big).$$

Posant $G_2(z,\xi) := \sum_{R<r'\leq\xi} g_2(z,r')$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\sum_{z\in\mathcal{Z}}\Big|\sum_{R<r\leq 2R} g_1(z,r)g_2(z,r)\Big| &= \sum_{z\in\mathcal{Z}}\Big|\int_{R+}^{2R+} g_1(z,\xi)\mathrm{d}G_2(z,\xi)\Big| \\ &\leq \sup_{\substack{z\in\mathcal{Z}\\ R<\xi\leq 2R}} |g_1(z,\xi)| \times \sum_{z\in\mathcal{Z}}|G_2(z,2R)| \\ &\quad + R\sup_{\substack{z\in\mathcal{Z}\\ R<\xi\leq 2R}}\Big|\frac{\partial g_1}{\partial\xi}(z,\xi)\Big| \times \sup_{R<\xi\leq 2R}\sum_{z\in\mathcal{Z}}|G_2(z,\xi)|\end{aligned}$$

Pour tout $\xi\in]R,2R]$ et $z=(\chi,k_1,k_2,h)\in\mathcal{Z}$, la majoration (4.11) fournit

$$G_2(z,\xi)\ll x^\varepsilon\{(ah,k_2)^{1/2}k_2^{1/2}+(ah,k_2)Rk_2^{-1}\},$$

on obtient donc, en utilisant l'inégalité $\sum_{a\leq A}(a,b)\leq A\tau(b)$ valable pour tous $b\in\mathbf{N}$, $A\geq 1$,

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}}|G_2(z,\xi)|\ll x^\varepsilon|\mathcal{X}|HK^{5/2}+x^\varepsilon|\mathcal{X}|HKR.$$

Par ailleurs, $|g_1(z,\xi)|\ll M$ et $\partial g_1/\partial\xi(z,\xi)\ll HM^2R^{-2}$. Ainsi, sous les hypothèses (4.13) ou (4.14), on a $R_2\ll x^{6\varepsilon}\{K^{5/2}R^{-1}+K\}\ll x^{1-\varepsilon}KR^{-1}$, ce qui fournit

$$\mathcal{S}_2=\widehat{f}(0)X_2+O(x^{1-\varepsilon}KR^{-1}). \tag{4.20}$$

4.3.4 Estimation de $\mathcal{S}_1$

En séparant les sommants de $\mathcal{S}_1$ selon la valeur de (k_1,k_2), on a

$$\mathcal{S}_1=\sum_{v\geq 1}\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\sum_{(m,r)=1}f(m)\sum_{\substack{k_1\equiv a\overline{m}\pmod r\\ k_2\equiv a\overline{m}\pmod r\\ (k_1,k_2)=v}}\sum u_{k_1}\overline{u_{k_2}}=\sum_{v\geq 1}S(v)$$

avec pour tout $v\geq 1$,

$$S(v):=\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\sum_{(m,r)=1}f(m)\sum_{\substack{k_1\equiv a\overline{m}\pmod r\\ k_2\equiv a\overline{m}\pmod r\\ (k_1,k_2)=v}}\sum u_{k_1}\overline{u_{k_2}}.$$

Soit $\eta>0$. La contribution des indices $v\geq x^\eta$ est majorée par

$$\begin{aligned}\sum_{v\geq x^\eta}S(v) &\leq \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,a)=1}}\sum_{(m,r)=1}f(m)\sum_{\substack{v\geq x^\eta\\ (v,r)=1}}\Bigg(\sum_{\substack{k\equiv a\overline{m}\pmod r\\ v|k}}|u_k|\Bigg)^2 \\ &\ll \frac{K\log K}{R}\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,a)=1}}\sum_{(m,r)=1}f(m)\sum_{\substack{v\geq x^\eta\\ (v,r)=1}}\frac{\tau(v)}{v}\sum_{\substack{k\equiv a\overline{m}\pmod r\\ v|k}}|u_k| \\ &\ll \frac{Kx^{\eta/4}}{R}\sum_k|u_k|\frac{\tau(k)}{x^\eta}\sum_{\substack{m\\ mk\neq a}}f(m)\tau(|mk-a|)+K\log K\tau(|a|)^3 \\ &\ll x^{1-\eta/2}KR^{-1}\end{aligned}$$

quitte à supposer $\eta \leq 5\varepsilon$. On fixe à présent un entier $v \leq x^\eta$, et on écrit de façon unique $k_1 = vd_1k_1''$ avec $d_1|v^\infty$ (c'est-à-dire $p|d_1 \Rightarrow p|v$) et $(k_1', v) = 1$, ainsi que $k_2 = vk_2'$. La contribution à $S(v)$ des indices k_1 pour lesquels $d_1 > x^\eta$ est

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d_1>x^\eta\\ d_1|v^\infty}}\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\sum_{(m,r)=1} f(m) \sum\sum_{\substack{d_1k_1''\equiv k_2'\equiv a\overline{vm} \pmod r\\ (d_1k_1'',k_2')=(k_1'',d_1)=1}} u_{vd_1k_1''}\overline{u_{vk_2'}}\\
&\ll x^{\eta/4}\sum_{\substack{d_1>x^\eta\\ d_1|v^\infty}}\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\sum_{(m,r)=1} f(m)\sum_{\substack{K/(vd_1)<k_1''\leq 2K/(vd_1)\\ k_1''\equiv a\overline{vd_1m} \pmod r}}\ \sum_{\substack{K/v<k_2'\leq 2K/v\\ k_2'\equiv d_1k_1'' \pmod r}} 1\\
&\ll KR^{-1}x^{\eta/4}\sum_{\substack{d_1>x^\eta\\ d_1|v^\infty}}\sum_m f(m)\sum_{\substack{K/(vd_1)<k_1''\leq 2K/(vd_1)\\ vd_1k_1''m\neq a}} \tau(|vd_1k_1''m-a|) + K\tau(|a|)^3\\
&\ll x^{1+\eta/2}KR^{-1}\sum_{\substack{d_1>x^\eta\\ d_1|v^\infty}} d_1^{-1} + Kx^\eta\\
&\ll x^{1-\eta/4}KR^{-1}
\end{aligned}$$

la dernière majoration étant uniforme pour $v \leq x$. On se retreint donc dorénavant aux indices $d_1 \leq x^\eta$. On note pour tout $d_1|v^\infty$:

$$S(d_1;v) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\sum_{(m,r)=1} f(m)\sum\sum_{\substack{k_1\equiv k_2\equiv a\overline{m} \pmod r\\ (k_1,k_2)=v, vd_1|k\\ (k_1/(vd_1),v)=1}} u_{k_1}\overline{u_{k_2}}.$$

En appliquant le Lemme 4.2 à la somme sur m, on obtient

$$S(d_1;v) = \widehat{f}(0)X_1(d_1;v) + R(d_1;v) + T(d_1;v)$$

avec, en notant encore $H := x^\eta RM^{-1}$,

$$X_1(d_1;v) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\frac{1}{r}\sum\sum_{\substack{k_1\equiv k_2 \pmod r\\ (k_1,r)=1,(k_1,k_2)=v\\ vd_1|k_1,(k_1/(vd_1),v)=1}} u_{k_1}\overline{u_{k_2}},$$

$$R(d_1;v) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}}\frac{1}{r}\sum\sum_{\substack{k_1\equiv k_2 \pmod r\\ (k_1,r)=1,(k_1,k_2)=v\\ vd_1|k_1,(k_1/(vd_1),v)=1}} u_{k_1}\overline{u_{k_2}}\sum_{1\leq|h|\leq H}\widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(\frac{-ha\overline{k_1}}{r}\Big),$$

$$T(d_1;v) \ll \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,v)=1}}\frac{1}{r}\sum\sum_{\substack{k_1\equiv k_2 \pmod r\\ (k_1,r)=1,(k_1,k_2)=v\\ vd_1|k_1,(k_1/(vd_1),v)=1}} |u_{k_1}u_{k_2}|.$$

On a de plus, quitte à supposer $\eta < \varepsilon$ (de sorte que $K > x^\eta$),

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\geq 1}\sum_{d_1|v^\infty} T_1(d_1;v) \ll x^\eta K^2R^{-1} + K,\\
&\sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1>x^\eta\\ d_1|v^\infty}} X_1(d_1;v) \ll R^{-1}\sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1>x^\eta\\ d_1|v^\infty}}\sum_{vd_1|k_1}|u_{k_1}|\sum_{\substack{v|k_2\\ k_2\neq k_1}}|u_{k_2}|\tau(|k_2-k_1|)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \ll K^2R^{-1}x^{-\eta/2},\\
&\sum_{v>x^\eta}\sum_{d_1|v^\infty} X_1(d_1;v) \ll K^2R^{-1}x^{-\eta/2} + Kx^{\eta/2}.
\end{aligned}$$

Au final, on a

$$\mathcal{S}_1 = \widehat{f}(0)X_1 + \sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1\leq x^\eta\\ d_1|v^\infty}} R(d_1;v) + O(x^{1-\eta/4}KR^{-1})$$

avec

$$X_1 := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,a)=1}}\frac{1}{r}\sum_{\substack{0<b<r\\ (b,r)=1}}\Big|\sum_{k\equiv b \pmod r} u_k\Big|^2.$$

Il reste à étudier le terme

$$\sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1\leq x^\eta\\ d_1|v^\infty}} R(d_1;v).$$

La suite $(u_{vk'})_{k'}$ est une combinaison linéaire de $\tau(v)$ produits de convolutions de suites de type $(\beta_{\eta n'})_{n'}$ et $(\lambda_{\eta\ell'})_{\ell'}$ pour différents entiers η divisant v. Afin de clarifier les notations, on démontre la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé suffisamment petit. Lorsque $a \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ et $v, d_1, d_2 \in \mathbf{N}$, pour tous réels $M, K, N, L, R, \mathcal{E}$ supérieurs à 1, toutes suites (u_k), (β_n), (λ_ℓ) de supports respectifs dans les entiers de $]K, 4K]$, $]N, 2N]$, $]L, 2L]$, vérifiant pour tous k, n, ℓ,*

$$|u_k| \leq \tau(k), \quad \max\{|\beta_n|, |\lambda_\ell|\} \leq 1,$$

$$(k, vd_1d_2) > 1 \Rightarrow u_k = 0, \qquad (n\ell, vd_1) > 1 \Rightarrow \beta_n\lambda_\ell = 0,$$

et toute fonction lisse $\Phi_0 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ à support compact inclus dans $[1/2, 3]$, en posant $f(m) := \Phi_0(m/M)$, la majoration suivante :

$$\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,avd_1d_2)=1}}\frac{1}{r}\sum\sum\sum_{\substack{d_1k\equiv d_2n\ell \pmod r\\ (d_1k,d_2n\ell)=1}} u_k\beta_n\lambda_\ell\sum_{1\leq|h|\leq H}\widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(\frac{-ha\overline{vd_1d_2k}}{r}\Big) \ll (MKNL)^{10\varepsilon}MKNLR^{-1}\mathcal{E}^{-1} \tag{4.21}$$

est valable sous l'un quelconque des deux ensembles de conditions suivants :

$$\begin{cases} |avd_1d_2| \leq (KNL)^\varepsilon, \quad NL \leq d_2K, \quad H \leq R^{1+\varepsilon}M^{-1},\\ K \leq LN^2, \quad R^\varepsilon K \leq NM, \quad M \leq R \leq K, \quad NL \leq KM, \quad R \leq M^2NL\mathcal{E}^{-1},\\ K \leq M^{1/2}N^{1/2}R^{1/2}\mathcal{E}^{-1}, \quad K^{1/4}N^{1/2} \leq M^{1/2}L^{1/4}\mathcal{E}^{-1}, \quad K^{1/2} \leq M^{1/2}L^{1/4}\mathcal{E}^{-1}, \end{cases} \tag{4.22}$$

ou

$$\begin{cases} |vd_1d_2| \leq (KNL)^\varepsilon, \quad |a|R^\varepsilon \leq vd_1d_2^2M\{K+NL\}, \quad H \leq R^{1+\varepsilon}M^{-1},\\ M \leq R \leq K, \quad K \leq MN^{1/2}\mathcal{E}^{-1}, \quad N^{1/2}L^{1/4} \leq MR^{-1/2}\mathcal{E}^{-1} \end{cases} \tag{4.23}$$

Dans cette proposition K et NL jouent un rôle semblable mais ne sont pas nécessairement égaux. Dans le système (4.22), les conditions

$$NL \le d_2K, \quad K \le NL^2, \quad NL \le KM, \quad R \le M^2NL\mathcal{E}^{-1}$$

sont imposées afin d'améliorer la présentation des calculs et sont faciles à satisfaire en pratique : lorsque $K = NL$, les trois premières sont triviales et la dernière découle de $R \le K$ si $\mathcal{E} \le M^2$, ce qui sera vérifié dans les applications.

Démonstration de la Proposition 4.3. On note $\nu := vd_1d_2$ et

$$\gamma_k := \sum_{n\ell=k} \beta_n\lambda_\ell. \tag{4.24}$$

L'objet d'étude est

$$\mathcal{R} := \sum_{\substack{R<r\le 2R\\(r,a\nu)=1}} \frac{1}{r} \sum\sum_{\substack{d_1k_1\equiv d_2k_2 \pmod r\\(d_1k_1,d_2k_2)=1}} u_{k_1}\gamma_{k_2} \sum_{1\le|h|\le H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(-ah\frac{\overline{\nu k_1}}{r}\Big).$$

La suite γ est à support dans $]NL, 4NL]$. On rappelle que K et NL ne sont pas nécessairement égaux.

Les entiers r, ν, k_1 étant deux à deux premiers entre eux, on a la congruence

$$\nu k_1\overline{\nu k_1}^{(r)} + \nu(d_2k_2 - d_1k_1)\overline{\nu d_2k_2}^{(k_1)} + rk_1\overline{rk_1}^{(\nu)} \equiv 1 \pmod{r\nu k_1}$$

(où $\overline{a}^{(q)}$ désigne un inverse de a modulo q). Ainsi, avec $t := (d_2k_2 - d_1k_1)/r$, on a

$$-ah\frac{\overline{\nu k_1}}{r} \equiv aht\frac{\overline{\nu d_2k_2}}{k_1} + ah\frac{\overline{rk_1}}{\nu} - \frac{ah}{\nu k_1 r} \pmod 1. \tag{4.25}$$

Le dernier terme est $\ll R^\varepsilon|a|\{\nu KM\}^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{R} = &\sum_{\substack{R<r\le 2R\\(r,a\nu)=1}} \frac{1}{r} \sum\sum_{\substack{d_1k_1\equiv d_2k_2 \pmod r\\(d_1k_1,d_2k_2)=1}} u_{k_1}\gamma_{k_2} \sum_{1\le|h|\le H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(aht\frac{\overline{\nu d_2k_2}}{k_1} + ah\frac{\overline{rk_1}}{\nu}\Big)\\ &+ O(|a|(RKNL)^\varepsilon K\{\nu M\}^{-1}).\end{aligned}$$

On note $\mathcal{R}'$ le premier terme du membre de droite et pour tout entier w avec $0 < w < \nu$ et $(w, \nu) = 1$, on note

$$\phi(w) := t\frac{\overline{\nu d_2k_2}}{k_1} + \frac{\overline{wk_1}}{\nu}$$

$$\mathcal{R}(w) := \sum_{\substack{R<r\le 2R\\(r,a)=1\\r\equiv w \pmod \nu}} \frac{1}{r} \sum\sum_{\substack{d_1k_1\equiv d_2k_2 \pmod r\\(d_1k_1,d_2k_2)=1}} u_{k_1}\gamma_{k_2} \sum_{1\le|h|\le H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}(ah\phi(w)).$$

Les conditions sur r sont :

$$R < r \le 2R, \qquad (r, a) = 1, \qquad r \equiv w \pmod \nu, \qquad d_1k_1 \equiv d_2k_2 \pmod r,$$

elles deviennent vis-à-vis de $t = (d_2k_2 - d_1k_1)/r$:

$$R \le \frac{d_2k_2 - d_1k_1}{t} \le 2R, \qquad d_2k_2 - d_1k_1 \equiv wt \pmod{\nu t}, \qquad (d_2k_2 - d_1k_1, at) = t.$$

On détecte la troisième grâce à la relation

$$\sum_{\substack{\sigma|a\\ \sigma t|d_2k_2-d_1k_1}} \mu(\sigma) = \mathbf{1}_{(d_2k_2-d_1k_1,at)=t}.$$

Pour un indice σ de cette somme, on a $(\sigma,\nu)=1$. Ainsi, pour un certain $\sigma|a$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}'| &= \Big|\sum_{\substack{0<w<\nu\\(w,\nu)=1}} \mathcal{R}(w)\Big| \\
&\leq \tau(|a|)\Bigg|\sum_{\substack{0<w<\nu\\(w,\nu)=1}}\sum_{t\neq 0}\ \sum\sum_{\substack{(d_1k_1,d_2k_2)=1\\ R<(d_2k_2-d_1k_1)/t\leq 2R\\ d_2k_2-d_1k_1\equiv wt \pmod{\nu t}\\ \sigma t|d_2k_2-d_1k_1}} u_{k_1}\gamma_{k_2}\frac{t}{d_2k_2-d_1k_1}\sum_{1\leq|h|\leq H}\widehat{f}\Big(\frac{ht}{d_2k_2-d_1k_1}\Big)\mathrm{e}(ah\phi(w))\Bigg| \\
&\ll |a|^{\varepsilon}\Bigg|\sum_{\substack{0<w<\nu\\(w,\nu)=1}}\sum_{t\neq 0}\ \sum\sum_{\substack{(d_1k_1,d_2k_2)=1\\ R<(d_2k_2-d_1k_1)/t\leq 2R\\ d_2k_2-d_1k_1\equiv w\sigma t \pmod{\nu\sigma t}}} u_{k_1}\gamma_{k_2}\frac{t}{d_2k_2-d_1k_1}\sum_{1\leq|h|\leq H}\widehat{f}\Big(\frac{ht}{d_2k_2-d_1k_1}\Big)\mathrm{e}(ah\phi(w\overline{\sigma}^{(\nu)}))\Bigg|.
\end{aligned}$$

On a $\sigma t|d_2k_2-d_1k_1$ et $(d_1k_1,d_2k_2)=1$, donc $(k_2,\sigma t)=1$. On utilise ensuite les relations :

$$\frac{\mathbf{1}_{d_2|d_1k_1+w\sigma t}}{\varphi(vd_1\sigma t)}\sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}}\chi(k_2)\overline{\chi((d_1k_1+w\sigma t)/d_2)} = \mathbf{1}_{d_2k_2\equiv d_1k_1+w\sigma t \pmod{\nu\sigma t}}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}((d_2k_2-d_1k_1)\vartheta)F(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = \mathbf{1}_{R<(d_2k_2-d_1k_1)/t\leq 2R}$$

où $F(\vartheta) := \sum_{a\in\mathbf{Z},R<a/t\leq 2R}\mathrm{e}(a\vartheta) \ll \min\{TR,|\vartheta|^{-1}\}$ pour $|\vartheta|\leq 1/2$, et avec la notation $T := \max\{d_1K, d_2NL\}/R$. On a donc

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}'| \ll |a|^{\varepsilon}\Bigg|&\sum_{\substack{0<w<\nu\\(w,\nu)=1}}\sum_{1\leq|t|\leq T}\ \sum\sum_{\substack{(d_1k_1,d_2k_2)=1\\ d_2|d_1k_1+w\sigma t}}\frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)} \\
&\times\sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}}\chi(k_2)\overline{\chi((d_1k_1+w\sigma t)/d_2)}u_{k_1}\gamma_{k_2}\int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{e}((d_2k_2-d_1k_1)\vartheta)F(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&\times\sum_{1\leq|h|\leq H}\frac{t}{d_2k_2-d_1k_1}\widehat{f}\Big(\frac{ht}{d_2k_2-d_1k_1}\Big)\mathrm{e}(ah\phi(w\overline{\sigma}^{(\nu)}))\Bigg|.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant la définition de $\widehat{f}$ puis la formule d'inversion de Fourier, on a

$$\frac{t}{d_2k_2-d_1k_1}\widehat{f}\left(\frac{ht}{d_2k_2-d_1k_1}\right) = \int_0^{3MR^{-1}}\int_{-\infty}^{\infty} t\widehat{f}(\eta t)\mathrm{e}(-\eta\xi(d_2k_2-d_1k_1))\mathrm{e}(\xi h)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi.$$

En injectant la définition (4.24) et en renommant k_1 en k, on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}'| \ll |a|^{\varepsilon}&\sum_{\substack{0<w<\nu\\(w,\nu)=1}}\sum_{k}|u_k|\sum_{(\ell,k)=1}|\lambda_\ell|\sum_{1\leq|t|\leq T}\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^{3MR^{-1}}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\vartheta)t\widehat{f}(\eta t)|\frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)} \\
&\times\sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}}\Bigg|\sum_{(n,k)=1}\sum_{1\leq|h|\leq H}\beta_n\chi(n)\mathrm{e}(ah\phi(w\overline{\sigma}^{(\nu)})+d_2n\ell\vartheta+\xi h-\eta\xi d_2n\ell)\Bigg|\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned}$$

On effectue les changements de variables $\eta \leftarrow \eta/\ell, \vartheta \leftarrow \vartheta/\ell$:

$$|\mathcal{R}'| \ll |a|^{\varepsilon} \int_{-L}^{L} \int_{0}^{3MR^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{\max\{2|\vartheta|,L\}\leq \ell\leq 2L} \Big|\frac{1}{\ell}F\Big(\frac{\vartheta}{\ell}\Big)\Big| \sup_{\substack{1\leq |t|\leq T\\ L<\ell\leq 2L}} \Big|\frac{t}{\ell}\widehat{f}\Big(\frac{\eta t}{\ell}\Big)\Big|$$
$$\times \sum_{\substack{0<w<\nu\\ (w,\nu)=1}} \sum_{k} \sum_{(\ell,k)=1} \sum_{1\leq |t|\leq T} |u_k\lambda_\ell| \frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)}$$
$$\times \sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}} \Big| \sum_{(n,k)=1} \sum_{1\leq |h|\leq H} \beta_n \chi(n) \mathrm{e}\Big(aht\frac{\overline{\nu d_2 n\ell}}{k} + ah\frac{\sigma\overline{wk}}{\nu} + d_2 n\vartheta + \xi h - \eta\xi d_2 n\Big)\Big| \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\vartheta.$$

On rappelle que par les hypothèses faites sur u, β, λ, les sommations sont restreintes aux indices k, n, ℓ tels que $(k,\nu) = (n\ell, vd_1) = 1$. On permute les sommations sur w et k et on effectue le changement de variables $w \leftarrow w\overline{k}^{(\nu)}\sigma$. Par ailleurs les deux sup sont respectivement $O(\min\{|\vartheta|^{-1}, TRL^{-1}\})$ et $O(\min\{MTL^{-1}, |\eta|^{-1}, LM^{-1}|\eta|^{-2}\})$. Finalement, pour des entiers σ, w et des réels η, ξ, ϑ dépendant au plus de v, d_1, d_2 et a et vérifiant $\sigma|a$, $(w,\nu) = 1$, et ayant posé

$$\beta(n,h) := \beta_n \mathrm{e}\Big(ah\frac{\overline{w}}{\nu} + d_2 n\vartheta + \xi h - \eta\xi d_2 n\Big),$$

on obtient

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}'| &\ll (|a|TR)^{\varepsilon}\nu MR^{-1} \sum_{k} \sum_{(\ell,k)=1} \sum_{1\leq |t|\leq T} |u_k\lambda_\ell| \\ &\quad \times \frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)} \sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}} \Big| \sum_{(n,k)=1} \sum_{1\leq |h|\leq H} \beta(n,h)\chi(n)\mathrm{e}\Big(aht\frac{\overline{\nu d_2 n\ell}}{k}\Big)\Big| \qquad (4.26)\\ &\ll (|a|KTR)^{\varepsilon}\nu MR^{-1}\{KLT\}^{1/2}\mathcal{B}^{1/2}\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec

$$\mathcal{B} := \sum_{1\leq |t|\leq T} \frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)} \sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}} \sum_{(k,\nu)=1} \Phi_0\Big(\frac{k}{K}\Big) \times$$
$$\times \sum_{(\ell,k)=1} \Phi_0\Big(\frac{\ell}{L}\Big) \Big| \sum_{(n,k)=1} \sum_{1\leq |h|\leq H} \beta(n,h)\chi(n)\mathrm{e}\Big(aht\frac{\overline{\nu d_2 n\ell}}{k}\Big)\Big|^2.$$

Ici $\Phi_0 : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ dénote une fonction lisse majorée par la fonction indicatrice de l'intervalle $[1/2, 3]$ et majorant la fonction indicatrice de l'intervalle $[1, 2]$. En développant le carré et en évaluant la somme sur χ, on obtient

$$\mathcal{B} = \sum\sum\sum_{\substack{1\leq |t|\leq T\\ (k,\nu)=1\\ (\ell,k)=1}} \Phi_0\Big(\frac{k}{K}\Big)\Phi_0\Big(\frac{\ell}{L}\Big) \sum\sum_{1\leq |h|,|h'|\leq H} \sum\sum_{\substack{(nn',vd_1\sigma tk)=1\\ n\equiv n' \pmod{vd_1\sigma t}}} \beta(n,h)\overline{\beta(n',h')}\mathrm{e}\Big(at(n'h-nh')\frac{\overline{\nu d_2 nn'\ell}}{k}\Big).$$

On pose pour tous entiers e, q :

$$B_{e,q} := \sum_{\substack{n,n'\\ nn'=q}} \sum_{\substack{1\leq |t|\leq T, t|e\\ n\equiv n' \pmod{vd_1\sigma t}\\ (nn',vd_1\sigma t)=1}} \sum\sum_{\substack{1\leq |h|,|h'|\leq H\\ n'h-nh'=e/t}} \beta(n,h)\overline{\beta(n',h')}.$$

On a $B_{e,q} = 0$ si e et q ne vérifient pas $|e| \leq 4HNT$ et $N^2 < q \leq 4N^2$. Par ailleurs,

$$\mathcal{B} = \sum_e \sum_q B_{e,q} \sum_{\substack{k \quad \ell \\ (k,\nu q\ell)=1}} \sum \Phi_0\Big(\frac{k}{K}\Big)\Phi_0\Big(\frac{\ell}{L}\Big)\mathrm{e}\Big(ae\frac{\overline{\nu d_2 q\ell}}{k}\Big).$$

On sépare la contribution des termes avec $e = 0$:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(e = 0) + \mathcal{B}(e \neq 0)$$

avec

$$\mathcal{B}(e = 0) \ll KL \sum_n \sum_{n'} |\beta_n \beta_{n'}| \sum_{\substack{1 \leq |t| \leq T \\ n \equiv n' \pmod t}} \sum_{\substack{1 \leq |h|, |h'| \leq H \\ nh' = n'h}} \sum 1.$$

La contribution des termes de la somme avec $n = n'$ est $O(KNLHT)$. Le reste contribue

$$\ll KL \sum_n |\beta_n| \sum_{\delta | n} \sum_{(n',n)=\delta} |\beta_{n'}| \tau(|n - n'|) \sum_{\substack{1 \leq |h| \leq H \\ n/\delta | h}} \tau(n'h/n) \ll (HN)^\varepsilon KLNH.$$

On a donc $\mathcal{B}(e = 0) \ll (HN)^\varepsilon KLNHT$. Le Lemme 4.4 s'applique à la somme $\mathcal{B}(e \neq 0)$ avec

$$C \leftarrow K, \quad D \leftarrow L, \quad N \leftarrow 4|a|HNT, \quad R \leftarrow 4\nu d_2 N^2, \quad S \leftarrow 1$$

et permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(e \neq 0) \ll (|a|\nu KLNR)^\varepsilon \Big\{ &K(\nu d_2 N^2 + |a|HNT)(K + \nu d_2 LN^2) \\ &+ K^2 L\sqrt{(\nu d_2 N^2 + |a|HNT)N^2} + \nu d_2 |a| L^2 HTN^3 \Big\}^{1/2} \Big\{ \sum_{e \neq 0} \sum_q |B_{e,q}|^2 \Big\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Afin d'estimer le dernier crochet, on sépare la contribution des termes avec $n = n'$: on écrit

$$|B_{e,q}| \ll B_1(|e|, q) + B_2(|e|, q)$$

avec

$$B_1(e, q) := \begin{cases} |\beta_n|^2 \mathrm{card}\ \{(t, h, h') | 1 \leq |h|, |h'| \leq H, 1 \leq |t| \leq T \mid tn(h - h') = e\} & \text{si } q = n^2, n|e \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$B_2(e, q) := \sum_{\substack{nn'=q \\ n \neq n'}} |\beta_n \beta_{n'}| \sum_{\substack{1 \leq t \leq T, t|e \\ n \equiv n' \pmod t}} \sum_{\substack{1 \leq |h|, |h'| \leq H \\ n'h - nh' = e/t}} \sum 1.$$

On a

$$\begin{aligned}&\sum_n \sum_{e'} |B_1(ne', n^2)|^2 \\ &\ll \sum_n |\beta_n|^4 \sum_{0 < e' \leq 2HT} \Big\{ \sum_{t | e'} \mathrm{card}\ \{1 \leq |h|, |h'| \leq H \mid h - h' = e'/t\} \Big\}^2 \\ &\ll (HT)^\varepsilon H^3 NT.\end{aligned}$$

En ce qui concerne $B_2(e,q)$, on a

$$B_2(e,q) \leq \sum_{\substack{nn'=q\\ n\neq n'}} |\beta_n\beta_{n'}| \sum_{\substack{1\leq t\leq T\\ t|e}} \sum_{\substack{1\leq |h|,|h'|\leq H\\ n'h-nh'=e/t}} 1 \ll \tau(e)\Big(1+\frac{H}{N}\Big) \sum_{nn'=q} (n,n')|\beta_n\beta_{n'}|.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_e\sum_q B_2(e,q)^2 &\ll (HNT)^{\varepsilon/2}(H+N)N^{-1}\sum_e\sum_q\sum_{nn'=q}(n,n')|\beta_n\beta_{n'}|B_2(e,q)\\ &\ll (HNT)^{\varepsilon/2}(H+N)H^2N^{-1}\sum_{n_1}\sum_{n_2}(n_1,n_2)|\beta_{n_1}\beta_{n_2}|\sum_{\substack{n_3n_4=n_1n_2\\ n_3\neq n_4}}|\beta_{n_3}\beta_{n_4}|\tau(|n_3-n_4|)\\ &\ll (HNT)^{\varepsilon}(H+N)H^2N^{-1}\sum\sum\sum_{n_1n_2=n_3n_4}(n_1,n_2)|\beta_{n_1}\beta_{n_2}\beta_{n_3}\beta_{n_4}|.\end{aligned}$$

On note que

$$\sum\sum\sum_{n_1n_2=n_3n_4}(n_1,n_2)|\beta_{n_1}\beta_{n_2}\beta_{n_3}\beta_{n_4}| \ll N^2(\log N)^5.$$

En regroupant les estimations et grâce aux hypothèses (4.22), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \ll |a|(KNLR)^{\varepsilon}KM^{-1} &+ (KNLR)^{5\varepsilon}MR^{-1}\{K^2LR^{-1}\}^{1/2}\Big\{K^2NLM^{-1}\\ &+\{KN^4L+K^2N^2L+KN^3L^2M^{-1}\}^{1/2}RNM^{-1}\Big\}^{1/2}.\end{aligned}$$

En utilisant $M\leq R\leq K$, $NL\leq KM$ et $K\leq NM$, on obtient

$$\mathcal{R}(KNL)^{-10\varepsilon} \ll KM^{-1} + M^{1/2}K^{5/4}N^{1/2}L^{3/4}R^{-3/2}\{K^{3/4}L^{1/4}+R^{1/2}N+R^{1/2}K^{1/4}N^{1/2}\}.$$

Sous les conditions (4.22), le membre de droite est $O(MKNL\mathcal{E}^{-1})$.

On majore dans un second temps la quantité $\mathcal{R}$ en utilisant le Lemme 4.3. On reprend l'étude précédente sans majorer trivialement la contribution du terme $-ah/(\nu k_1 r)$ provenant de l'équation (4.25), et en utilisant l'égalité modulo 1

$$\frac{\overline{\nu d_2\ell n}}{k} \equiv -\frac{\overline{k}}{\nu d_2 n\ell} + \frac{1}{\nu d_2 n\ell k} \pmod 1.$$

On obtient pour un certain $\sigma|a$ et trois réels ξ,η,ϑ dépendant au plus de v,d_1,d_2 l'inégalité

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}'| \leq (|a|TR)^{\varepsilon}\nu MR^{-1}&\sum_{1\leq|t|\leq T}\sum_k\sum_{(\ell,k)=1}\frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)}\sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}}|u_k\lambda_\ell|\\ &\times\sum_{1\leq|h|\leq H}\Big|\sum_{(n,k)=1}\beta_n\chi(n)\mathrm{e}\Big(-\frac{aht\overline{k}}{\nu d_2 n\ell}+\frac{aht}{\nu d_2 n\ell k}+\eta\xi d_2 n\ell + d_2 n\ell\vartheta\Big)\Big|\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit

$$|\mathcal{R}'| \ll (|a|TR)^{\varepsilon}\nu MR^{-1}\{KLHT\}^{1/2}\mathcal{D}_0^{1/2}$$

où

$$\mathcal{D}_0 := \sum_{\substack{K<k\leq 4K\\(k,\nu d_2)=1}} \sum_{\substack{L<\ell\leq 2L\\(\ell,k)=1}} \sum_{1\leq |t|\leq T} \frac{1}{\varphi(vd_1\sigma t)}$$

$$\times \sum_{\chi \pmod{vd_1\sigma t}} \sum_{1\leq|h|\leq H} \Big| \sum_{(n,k)=1} \beta_n \chi(n) \mathrm{e}\Big(-\frac{aht\overline{k}}{\nu d_2 n\ell} + \frac{aht}{\nu d_2 n\ell k} + \eta\xi d_2 n\ell + d_2 n\ell\vartheta\Big)\Big|^2.$$

En développant le carré, il vient

$$\mathcal{D}_0 \leq \sum_{1\leq|h|\leq H} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\N<n'\leq 2N}}\sum \sum_{\substack{1\leq|t|\leq T,\\ n\equiv n' \pmod{vd_1\sigma t}}}\sum_{L<\ell\leq 2L} \Big| \sum_{\substack{K<k\leq 2K\\(k,\nu d_2 nn'\ell)=1}} \mathrm{e}\Big(\frac{aht\overline{k}}{\nu d_2\ell[n,n']}\frac{n-n'}{(n,n')} + \frac{aht(n'-n)}{\nu d_2 nn'\ell k}\Big)\Big|. \tag{4.27}$$

On élimine le second terme dans l'exponentielle en intégrant par parties. On écrit le membre de droite de cette égalité sous la forme :

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}} \Big| \sum_{K<k\leq 2K} g_1(z,k) g_2(z,k)\Big|$$

où $\mathcal{Z}$ est l'ensemble des quintuplets d'entiers (h,n,n',ℓ,t) correspondant à des indices dans la somme du membre de droite de (4.27), et les fonctions g_1 et g_2 sont définies lorsque $z=(h,n,n',\ell,t)\in\mathcal{Z}$ par

$$g_1(z,k) := \mathrm{e}\Big(\frac{aht\overline{k}}{\nu d_2\ell[n,n']}\frac{n-n'}{(n,n')}\Big), \qquad g_2(z,k) := \mathrm{e}\Big(\frac{aht(n'-n)}{\nu d_2 nn'\ell k}\Big).$$

En notant $G_2(z,k) := \sum_{K<k'\leq k} g(z,k')$, le membre de droite de (4.27) vaut

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}} \Big| \int_{\xi=K+}^{2K+} g_2(z,\xi)\mathrm{d}G_1(z,\xi)\Big| \leq \sup_{\substack{z\in\mathcal{Z}\\K<\xi\leq 2K}} |g_2(z,\xi)| \times \sum_{z\in\mathcal{Z}} |G_1(z,K)|$$

$$+ K \sup_{\substack{z\in\mathcal{Z}\\K<\xi\leq 2K}} \Big|\frac{\partial g_2}{\partial\xi}(z,\xi)\Big| \times \sup_{K<\xi\leq 2K} \sum_{z\in\mathcal{Z}} |G_1(z,\xi)|.$$

On a donc

$$\mathcal{D}_0 \ll \Big(1+\frac{|a|HT}{\nu d_2 KNL}\Big) \sup_{K<K'\leq 2K} \mathcal{D}(K')$$

où on a noté

$$\mathcal{D}(K') := \sum_{1\leq|h|\leq H} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\N<n'\leq 2N}}\sum \sum_{\substack{1\leq|t|\leq T\\ n\equiv n' \pmod{vd_1\sigma t}}} \sum_{L<\ell\leq 2L} \Big| \sum_{\substack{K<k\leq K'\\(k,\nu d_2 nn'\ell)=1}} \mathrm{e}\Big(\frac{aht\overline{k}}{\nu d_2\ell[n,n']}\frac{n-n'}{(n,n')}\Big)\Big|.$$

On remarque que $|a|HT \ll \nu d_2 KNL$ par hypothèse.

La contribution des indices n,n' avec $n=n'$ est $O(HTKNL)$. La majoration (4.10) fournit

$$\mathcal{D}(K') \ll HTKNL + \mathcal{D}_1 + (KNL)^{\varepsilon}\nu d_2\mathcal{D}_2$$

avec

$$\mathcal{D}_1 := K \sum_{1\leq|h|\leq H} \sum_{\substack{N<n'<n\leq 2N\\ n\equiv n' \pmod{vd_1\sigma t}}}\sum \sum_{1\leq|t|\leq T} \sum_{L<\ell\leq 2L} \frac{(\ell[n,n'], aht(n-n')/(n,n'))}{\ell[n,n']},$$

$$\mathcal{D}_2 := \sum_{1\le|h|\le H}\sum_{1\le|t|\le T}\mathop{\sum\sum}_{\substack{N<n'<n\le 2N\\ n\equiv n' \pmod{vd_1\sigma t}}}\sum_{L<\ell\le 2L}(\ell[n,n'])^{1/2}\Big(\ell[n,n'],aht\frac{n-n'}{(n,n')}\Big)^{1/2}.$$

Soit $\eta>0$. Dans $\mathcal{D}_1$, on sépare les sommants suivant la valeur de $d=(n,n')$ et on évalue les sommes sur h puis sur ℓ. On obtient

$$\mathcal{D}_1 \ll (RKNL|a|)^\eta KHN^{-2}\sum_{d\le 2N}d\sum_{1\le|t|\le T}\mathop{\sum\sum}_{\substack{N/d<n'<n\le 2N/d\\ (n,n')=1\\ dn\equiv dn' \pmod{vd_1\sigma t}}}(dnn',at(n-n')).$$

Dans cette somme, on a $(nn',n-n')=1$. Le terme général de la dernière somme est donc inférieur à $d(nn',at)$. En séparant de nouveau suivant la valeur de $\delta=(t,d)$, on obtient

$$\mathcal{D}_1 \ll (RKNL|a|)^\eta KHN^{-2}\sum_{\delta\le T}\delta^2\sum_{d\le 2N/\delta}d^2\sum_{\substack{1\le|t|\le T/\delta\\ (t,d)=1}}\mathop{\sum\sum}_{\substack{N/(d\delta)<n'<n\le 2N/(d\delta)\\ (n,n')=1\\ dn\equiv dn' \pmod{vd_1\sigma t}}}(nn',at\delta).$$

La condition de congruence sur n,n' implique $t|d(n-n')$ donc $t|n-n'$. Puisque $(n,n')=1$, on a $(t,nn')=1$, ainsi en évaluant la somme sur t on a

$$\mathcal{D}_1 \ll (RK^2NL|a|)^\eta KHN^{-2}\sum_{\delta\le T}\delta^2\sum_{d\le 2N/\delta}d^2\Big(\sum_{n\le 2N/(d\delta)}(n,a\delta)\Big)^2 \ll (RK^2N^2|a|^2)^\eta KHN.$$

Dans $\mathcal{D}_2$, on procède de même. En séparant les sommants suivant la valeur de $d=(n,n')$ et en évaluant les sommes sur h et ℓ, on obtient

$$\mathcal{D}_2 \ll (RKNL|a|)^\eta HNL^{3/2}\sum_{d\le 2N}d^{-1/2}\sum_{1\le|t|\le T}\mathop{\sum\sum}_{\substack{N/d<n'<n\le 2N/d\\ (n,n')=1\\ dn\equiv dn' \pmod{vd_1\sigma t}}}(dnn',at(n-n'))^{1/2}.$$

En séparant suivant la valeur de $\delta=(t,d)$, on obtient

$$\mathcal{D}_2 \ll (RKNL|a|)^\eta HNL^{3/2}\sum_{\delta\le T}\delta^{-1/2}\sum_{d\le 2N/\delta}d^{-1/2}\sum_{\substack{1\le|t|\le T/\delta\\ (t,d)=1}}\mathop{\sum\sum}_{\substack{N/(d\delta)<n'<n\le 2N/(d\delta)\\ (n,n')=1\\ dn\equiv dn' \pmod{vd_1\sigma t}}}(dnn',at(n-n'))^{1/2}.$$

Le terme général de la dernière somme est inférieur à

$$d^{1/2}(nn',at(n-n'))^{1/2}=d^{1/2}(nn',at)^{1/2}=d^{1/2}(nn',a)^{1/2},$$

ainsi on a

$$\mathcal{D}_2 \ll (RK^2NL|a|)^\eta HNL^{3/2}\sum_{\delta\le T}\delta^{-1/2}\sum_{d\le 2N/\delta}\Big(\sum_{n\le 2N/(d\delta)}(n,a)^{1/2}\Big)^2 \ll (RK^2N^2L|a|^2)^\eta HL^{3/2}N^3.$$

Avec $\eta=\varepsilon/2$ on obtient $\mathcal{D}_0 \ll (RKNL|a|)^\varepsilon HTKNL+(KR|a|)^\varepsilon \nu d_2HL^{3/2}N^3$ et finalement

$$|\mathcal{R}| \ll (RKNL|a|)^{3\varepsilon}\{TKLN^{1/2}+T^{1/2}K^{1/2}N^{3/2}L^{5/4}\}.$$

Cela est $O((MKNL)^{10\varepsilon}MKNLR^{-1}\mathcal{E}^{-1})$ sous les conditions (4.23). □

On rappelle que l'on a pour tout $\eta > 0$ suffisamment petit

$$\mathcal{S}_1 = \widehat{f}(0)X_1 + \sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1\leq x^\eta\\ d_1|v^\infty}} R(d_1;v) + O(x^{1-\eta/4}KR^{-1})$$

où

$$R(d_1;v) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}} \frac{1}{r} \sum\sum_{\substack{k_1\equiv k_2 \pmod r\\ (k_1,r)=1,(k_1,k_2)=v\\ vd_1|k_1,(k_1/(vd_1),v)=1}} u_{k_1}\overline{u_{k_2}} \sum_{1\leq|h|\leq H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(-ah\frac{\overline{k_1}}{r}\Big).$$

Pour tous v, k_1, k_2 avec $(k_1,k_2) = v$ et $(k_2/v, v) = d_2$, en notant $k_2 = vd_2k_2''$, on a

$$u_{k_2} = \sum_{\delta_1\delta_2=v}\sum_{\substack{n'\ell'=d_2k_2''\\ (\ell',\delta_1)=1}} \beta_{\delta_1 n'}\gamma_{\delta_2\ell'} = \sum_{\delta_1\delta_2=v}\sum_{\substack{\delta_3\delta_4=d_2\\ (\delta_4,\delta_1)=1}}\sum_{\substack{n''\ell''=k_2''\\ (\ell'',\delta_1\delta_3)=1}} \beta_{\delta_1\delta_3 n''}\gamma_{\delta_2\delta_4\ell''}$$

On obtient donc

$$\sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1\leq x^\eta\\ d_1|v^\infty}} R(d_1;v) = \sum_{v\leq x^\eta}\sum_{\substack{d_1\leq x^\eta\\ d_1|v^\infty}}\sum_{d_2|v}\sum_{\delta_1\delta_2=v}\sum_{\substack{\delta_3\delta_4=d_2\\ (\delta_4,\delta_1)=1}} \widetilde{R}(v;d_1,d_2,\delta_1,\delta_3) \tag{4.28}$$

avec

$$\widetilde{R}(v;d_1,d_2,\delta_1,\delta_3) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\ (r,av)=1}} \sum\sum\sum_{\substack{d_1k''\equiv d_2n''\ell'' \pmod r\\ (d_1k'',d_2n''\ell'')=1}} \widetilde{u}_{k''}\widetilde{\beta}_{n''}\widetilde{\lambda}_{\ell''} \sum_{1\leq|h|\leq H} \widehat{f}\Big(\frac{h}{r}\Big)\mathrm{e}\Big(-ah\frac{\overline{vd_1k''}}{r}\Big),$$

$$\widetilde{u}_{k''} := \mathbf{1}_{(k'',v)=1}u_{vd_1k''},\quad \widetilde{\beta}_{n''} := \mathbf{1}_{(n'',v/d_2)=1}\beta_{\delta_1\delta_3n''},\quad \widetilde{\lambda}_{\ell''} := \mathbf{1}_{(\ell'',\delta_1\delta_3v/d_2)=1}\lambda_{\delta_2\delta_4\ell''}.$$

Pour chaque choix d'indices dans la somme (4.28), on applique la Proposition 4.3 avec v/d_2 dans le rôle de v. On obtient pour un certain $\eta' > 0$ la majoration

$$\widetilde{R}(v;d_1,d_2,\delta_1,\delta_3) \ll x^{1-\eta'}KR^{-1}$$

lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} |avd_1| \leq x^{\eta'}, x^\eta \leq R^{\eta'}, \quad x^{3\eta'}L \leq M, \\ M \leq R \leq Kx^{-2\eta'}, \quad x^{2\eta'} \leq \min\{M,N\}, \quad x^{20\eta'}R \leq M^2K, \\ x^{20\eta'}N^{1/2}L \leq M^{1/2}R^{1/2}, \quad x^{20\eta'}N^{3/4} \leq M^{1/2}, \quad x^{20\eta'}N^{1/2}L^{1/4} \leq M^{1/2}, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} |vd_1| \leq x^{\eta'}, \quad |a| \leq x^{1-3\eta'}, \quad x^\eta \leq R^{\eta'}, \\ M \leq R \leq Kx^{-2\eta'}, \quad x^{30\eta'}N^{1/2}L \leq M, \quad x^{30\eta'}N^{1/2}L^{1/4} \leq MR^{-1}. \end{cases}$$

Cela implique $\mathcal{S}_1 - \widehat{f}(0)X_1 \ll (x^{1+2\eta-\eta'} + x^{1-\eta/4})KR^{-1}$. Lorsque η' est pris suffisamment petit en fonction de ε, et η en fonction de η', ces conditions sont satisfaites grâce aux hypothèses (4.13) ou (4.14), respectivement, et on obtient pour un certain $\delta > 0$

$$\mathcal{S}_1 = \widehat{f}(0)X_1 + O(x^{1-\delta}KR^{-1}). \tag{4.29}$$

4.3.5 Contribution des termes principaux

On remarque que

$$\begin{aligned}
X_1 - 2\,\mathfrak{Re}\,X_2 + X_3 &= \sum_{\substack{R<r\le 2R\\(r,a)=1}} \frac{1}{r} \sum_{\substack{0<b<r\\(b,r)=1}} \Big| \sum_{k\equiv b \pmod r} u_k - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{(k,r)=1} u_k \omega_\varepsilon(k\bar{b};r)\Big|^2 \\
&\le \frac{1}{R} \sum_{R<r\le 2R} \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\substack{\chi \text{ primitif}\\ \mathrm{cond}(\chi)>x^\varepsilon\\ \mathrm{cond}(\chi)\mid r}} \Big| \sum_{(k,r)=1} u_k\chi(k)\Big|^2.
\end{aligned}$$

Des calculs similaires à [Har12a, Section 4] fournissent

$$\begin{aligned}
X_1 - 2\,\mathfrak{Re}\,X_2 + X_3 &\le \frac{1}{R} \sum_{x^\varepsilon<s\le 2R} \sum_{\substack{\chi \pmod s\\ \chi \text{ primitif}}} \sum_{\substack{r\le 2R\\ s\mid r}} \frac{1}{\varphi(r)} \Big| \sum_{(k,r/s)=1} u_k\chi(k)\Big|^2 \\
&\le \frac{1}{R} \sum_{x^\varepsilon<s\le 2R} \sum_{\substack{\chi \pmod s\\ \chi \text{ primitif}}} \sum_{\substack{r\le 2R\\ s\mid r}} \frac{\tau(r/s)}{\varphi(r)} \sum_{d\mid r/s} \Big| \sum_{d\mid k} u_k\chi(k)\Big|^2 \\
&\ll \frac{(\log R)^2}{R} \sum_{d\le R} \frac{\tau(d)}{\varphi(d)} \sum_{x^\varepsilon<s\le 2R} \frac{1}{\varphi(s)} \sum_{\substack{\chi \pmod s\\ \chi \text{ primitif}}} \Big| \sum_{k'} u_{dk'}\chi(k')\Big|^2 \\
&= \frac{(\log R)^2}{R} \sum_{d\le R} \frac{\tau(d)}{\varphi(d)} \int_{x^\varepsilon}^\infty \sum_{x^\varepsilon<s\le \min\{2R,t\}} \frac{s}{\varphi(s)} \sum_{\substack{\chi \pmod s\\ \chi \text{ primitif}}} \Big| \sum_{k'} u_{dk'}\chi(k')\Big|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&\ll \frac{(\log R)^2}{R} \sum_{d\le R} \frac{\tau(d)}{\varphi(d)} \Big(\frac{K}{dx^\varepsilon} + R\Big)\frac{K}{d} \\
&\ll K^2R^{-1}x^{-\varepsilon/2}.
\end{aligned}$$

On a donc l'existence d'un réel positif δ tel que

$$\mathcal{S}_1 - 2\,\mathfrak{Re}\,\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 \ll x^{1-\delta}KR^{-1}.$$

En réinjectant cela dans (4.17), on obtient bien $\Delta(M,N,L,R) \ll x^{1-\delta/2}$.

4.3.6 Fin de la démonstration du Théorème 4.1

Lorsque y n'est pas trop proche de x, la fonction caractéristique de l'ensemble $S(x,y)$ est facilement approchée par une combinaison linéaire de convolutions. Cette propriété de factorisation découle du lemme suivant, *cf.* [FT96, lemme 3.2].

Lemme 4.6. *Étant donné $y \ge 2$, $N_1, N_2 \ge 1$, il existe pour tout $n > yN_1N_2$ tel que $P^+(n) \le y$ une unique factorisation $n = n_0n_1n_2$ telle que*

$$N_2 < n_2 \le N_2P^-(n_2), \qquad P^+(n_2) \le y,$$

$$N_1 < n_1 \le N_1P^-(n_1), \qquad P^+(n_1) \le P^-(n_2),$$

$$P^+(n_0) \le P^-(n_1).$$

Proposition 4.4. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des réels $c, \delta > 0$ tels que lorsque $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et $x, y \in \mathbf{R}$ avec $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$, on ait*

$$\sum_{\substack{r \leq x^{3/5-4\varepsilon} \\ (r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ P^+(n)\leq y \\ n\equiv a \pmod r}} 1 - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ P^+(n)\leq y \\ (n,r)=1}} \omega_\varepsilon(n\bar{a}; r) \Big| \ll x^{1-\delta} \qquad (|a| \leq x^{\delta}), \tag{4.30}$$

$$\sum_{\substack{r \leq x^{6/11-5\varepsilon} \\ (r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ P^+(n)\leq y \\ n\equiv a \pmod r}} 1 - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ P^+(n)\leq y \\ (n,r)=1}} \omega_\varepsilon(n\bar{a}; r) \Big| \ll x^{1-\delta} \qquad (|a| \leq x^{1-\varepsilon}). \tag{4.31}$$

On rappelle que $\omega_\varepsilon(k; r)$ est défini par (4.12).

Démonstration. On montre dans un premier temps l'estimation (4.30). Soit $\varepsilon > 0$ et $c > 1/\varepsilon$. On suppose $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$ et on définit

$$E(n; a, r) = E_\varepsilon(n; a, r) := \mathbf{1}_{n\equiv a \pmod r} - 1/\varphi(r) \mathbf{1}_{(n,r)=1} \omega_\varepsilon(n\bar{a}; r).$$

Pour tout $R \in \mathbf{R}$ avec $x^{4/9} \leq R \leq x^{3/5-4\varepsilon}$, on pose

$$M_0 := x^{1/2+2\varepsilon} R^{-1/6}, \quad L_0 := x^{1/2-\varepsilon} R^{-1/2}, \quad N_0 := x^{-\varepsilon} R^{2/3}.$$

On a $yM_0N_0 < x$, donc d'après le Lemme 4.6,

$$\sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ P^+(n)\leq y}} E(n; a, r) \Big| = \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{L_0<\ell\leq L_0 P^-(\ell) \\ P^+(\ell)\leq y}} \sum_{\substack{M_0<m\leq M_0 P^-(m) \\ P^+(m)\leq P^-(\ell)}} \sum_{\substack{x<mn\ell\leq 2x \\ P^+(n)\leq P^-(m)}} E(mn\ell; a, r) \Big|.$$

Pour tous L, M, N tels que

$$M_0 \leq M \leq yM_0/2, \qquad L_0 \leq L \leq yL_0/2, \qquad y^{-2}N_0 \leq N \leq N_0,$$

on considère la somme

$$\begin{aligned}\Delta^*(M, N, L, R) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \Big| & \sum_{\substack{L<\ell\leq 2L \\ \ell\leq L_0 P^-(\ell) \\ P^+(\ell)\leq y}} \sum_{\substack{M<m\leq 2M \\ m\leq M_0 P^-(m)}} \sum_{N<n\leq 2N} E(mn\ell; a, r) \times \\ & \times \mathbf{1}_{x<mn\ell\leq 2x} \mathbf{1}_{P^+(n)\leq P^-(m)} \mathbf{1}_{P^+(m)\leq P^-(\ell)} \Big|.\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{\substack{R<r\leq 2R \\ (r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ P^+(n)\leq y}} E(n; a, r) \Big| \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \log y/\log 2 \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \log y/\log 2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor 2\log y/\log 2 \rfloor} \Delta^*(M_0 2^i, N_0 2^{-k}, L_0 2^j, R).$$

On remarque que pour tout $\vartheta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ et $T \geq 1$ on a

$$\mathbf{1}_{\vartheta>0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{1/T\leq|t|\leq T} \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta t}}{t} \mathrm{d}t + O\Big(\frac{|\vartheta| + |\vartheta|^{-1}}{T}\Big). \tag{4.32}$$

En effet, le membre de gauche vaut

$$\frac{1}{2}+\int_0^\infty \frac{\sin(\vartheta t)}{\pi t}\mathrm{d}t$$

et on a les inégalités

$$\Big|\int_0^{1/T}\frac{\sin(\vartheta t)}{\pi t}\mathrm{d}t\Big|\leq\frac{|\vartheta|}{\pi T}\quad\text{et}\quad\Big|\int_T^\infty\frac{\sin(\vartheta t)}{\pi t}\mathrm{d}t\Big|\leq\frac{|\cos(\vartheta T)|}{\pi|\vartheta|T}+\int_T^\infty\frac{|\cos(\vartheta t)|}{\pi|\vartheta|t^2}\mathrm{d}t\leq\frac{2}{\pi|\vartheta|T}.$$

Dans l'expression définissant $\Delta^*(M,N,L,R)$, on applique l'estimation (4.32) avec $T=x^2$ quatre fois, pour les paramètres

$$\begin{aligned}\vartheta\in\{\,\log(\lfloor 2x\rfloor+1/2)-\log(mn\ell),\quad &\log(mn\ell)-\log(\lfloor x\rfloor+1/2),\\ P^-(m)+1/2-P^+(n),\qquad &P^-(\ell)+1/2-P^+(m)\}.\end{aligned}$$

On vérifie que pour chaque tel ϑ, on a $\max\{|\vartheta|,|\vartheta|^{-1}\}\ll y^2x$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\Delta^*(M,N,L,R)=&\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}}\Big|\sum_{\substack{L<\ell\leq 2L\\ \ell\leq L_0P^-(\ell)\\P^+(\ell)\leq y}}\ \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\m\leq M_0P^-(m)}}\ \sum_{N<n\leq 2N}T(m,n,\ell,x)E(mn\ell;a,r)\Big|\\&+O\Big(\frac{y^2(\log x)^3}{x}\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}}\sum_{n\leq 2x}\tau_3(n)|E(n;a,r)|\Big)\end{aligned}\tag{4.33}$$

avec, en notant $\mathcal{I}:=[-x^2,-x^{-2}]\cup[x^{-2},x^2]$,

$$\begin{aligned}T(m,n,\ell,x):=&\Big(\frac12+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{I}}(\lfloor 2x\rfloor+1/2)^{it}(mn\ell)^{-it}\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)\Big(\frac12+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{I}}(mn\ell)^{it}(\lfloor x\rfloor+1/2)^{-it}\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)\\&\times\Big(\frac12+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{I}}\mathrm{e}^{(P^-(m)+1/2)it}\mathrm{e}^{-P^+(n)it}\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)\Big(\frac12+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{I}}\mathrm{e}^{(P^-(\ell)+1/2)it}\mathrm{e}^{-P^+(m)it}\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big),\end{aligned}$$

et où $\tau_3(n)$ désigne le nombre de représentations de n en produits de 3 entiers. On a pour tout $\eta>0$

$$\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}}\sum_{n\leq 2x}\tau_3(n)|E(n;a,r)|\ll R+\sum_{\substack{n\leq 2x\\n\neq a}}\tau_3(n)\tau(|n-a|)+(\log R)x^{2\varepsilon}\sum_{n\leq 2x}\tau_3(n)\ll x^{1+3\varepsilon}.$$

On développe le terme $T(m,n,\ell,x)$. Dans le but de simplifier la forme de l'expression obtenue, on note $K:=i\pi/(8\log x)$ de sorte que

$$\frac12=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{I}}\frac{K\mathrm{d}t}{t}.$$

On obtient

$$T(m,n,\ell,x)=\sum_{j=0}^{15}\frac{1}{(2\pi)^4}\iiiint_{\mathcal{I}^4}K^{e_j}\alpha_m^{(j)}\beta_n^{(j)}\lambda_\ell^{(j)}\gamma_x^{(j)}\frac{\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4}{t_1t_2t_3t_4}$$

pour certains nombres complexes $\alpha_m^{(j)},\beta_n^{(j)},\lambda_\ell^{(j)},\gamma_x^{(j)}$ de modules 1, pouvant dépendre des t_k, et certains entiers positifs ou nuls e_j. En injectant cela dans l'expression (4.33), on obtient

$$\Delta^*(M,N,L,R)\ll\sum_{j=0}^{15}\iiiint_{\mathcal{I}^4}\mathcal{U}_{t_1,\cdots,t_4}(M,N,L,R)\frac{\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4}{|t_1t_2t_3t_4|}+x^{6\varepsilon},\ \text{avec}$$

$$\mathcal{U}_{t_1,\cdots,t_4}(M,N,L,R) := \sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{L<\ell\leq 2L\\ \ell\leq L_0 P^-(\ell)\\ P^+(\ell)\leq y}} \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ m\leq M_0 P^-(m)}} \sum_{N<n\leq 2N} \alpha_m^{(j)}\beta_n^{(j)}\lambda_\ell^{(j)} E(mn\ell;a,r)\Big|$$

Par construction de M_0, N_0, L_0, les conditions (4.13) sont satisfaites vis-à-vis de M, N, L, R, il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $j \in \{0,\dots,15\}$ et $(t_1,\dots,t_4) \in \mathcal{I}^4$, on ait

$$\mathcal{U}_{t_1,\cdots,t_4}(M,N,L,R) \ll x^{1-\delta}.$$

On obtient $\Delta^*(M,N,L,R) \ll (\log x)^4 x^{1-\delta}$, puis

$$\sum_{\substack{R<r\leq 2R\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x\\ P^+(n)\leq y}} E(n;a,r)\Big| \ll (\log y)^3 (\log x)^4 x^{1-\delta}.$$

En sommant pour $R = x^{3/5-4\varepsilon}2^{-j}$, $j \in \{1,\dots,\lfloor (1/10-3\varepsilon)\log x/\log 2\rfloor + 1\}$, on obtient

$$\sum_{\substack{x^{1/2-\varepsilon}<r\leq x^{3/5-4\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x\\ P^+(n)\leq y}} E(n;a,r)\Big| \ll (\log y)^3(\log x)^5 x^{1-\delta} \ll x^{1-\delta/2}.$$

Il découle par ailleurs de la proposition 2 de [Har12a] que

$$\sum_{\substack{r\leq x^{1/2-\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x<n\leq 2x\\ P^+(n)\leq y}} E(n;a,r)\Big| \ll x^{1-\delta/2}$$

quitte à diminer la valeur de δ et augmenter celle de c. Ceci prouve la Proposition 4.4.

L'estimation (4.31) se montre par une méthode similaire, pour les choix des paramètres suivants :

$$x^{4/9} \leq R \leq x^{6/11-5\varepsilon}, \quad M_0 := x^{1/3+2\varepsilon}R^{2/9}, \quad L_0 := R^{2/3}x^{-\varepsilon}, \quad N_0 := x^{2/3-\varepsilon}R^{-8/9}.$$

□

Démonstration du Théorème 4.1. Soit $\varepsilon > 0$ et c, δ les réels donnés par la Proposition 4.4. On suppose $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$, et dans un premier temps $|a| \leq x^\delta$. Avec $I := \lfloor 3\varepsilon \log x/\log 2\rfloor$, on a

$$\sum_{\substack{r\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{n\in S(x,y)} E(n;a,r)\Big| \leq \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\substack{r\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{x2^{-i-1}<n\leq x2^{-i}\\ P^+(n)\leq y}} E(n;a,r)\Big| + \sum_{\substack{r\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{n\leq x2^{-I}\\ P^+(n)\leq y}} E(n;a,r)\Big|.$$

On vérifie que l'on a $x^{3/5-6\varepsilon} \leq (x2^{-I})^{3/5-4\varepsilon}$, ce qui assure que l'estimation (4.30) de la Proposition 4.4 s'applique à chaque sommant de la somme sur i. Par ailleurs,

$$\sum_{\substack{r\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{\substack{n\leq x2^{-I}\\ P^+(n)\leq y}} E(n;a,r)\Big| \ll x^{3/5-6\varepsilon} + \sum_{\substack{n\leq x2^{-I}\\ n\neq a}} \tau(|n-a|) + x^{2\varepsilon}(\log R) \sum_{n\leq x2^{-I}} 1 \ll x^{1-\varepsilon/2}.$$

On obtient donc pour deux réels strictement positifs c, δ, lorsque $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$,

$$\sum_{\substack{r\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(r,a)=1}} \Big| \sum_{n\in S(x,y)} E(n;a,r)\Big| \ll (\log x)x^{1-\delta} + x^{1-\varepsilon/2} \ll x^{1-\delta/2} \tag{4.34}$$

quitte à réduire la valeur de δ. En écrivant

$$E(x,y;a,q) = \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,q)=1}} E(n;a,q) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,q)=1}} \sum_{\substack{\chi \text{ primitif}\\ 1<\mathrm{cond}(\chi)\leq x^{\varepsilon}\\ \mathrm{cond}(\chi)\mid q}} \chi(n)\overline{\chi(a)},$$

on obtient l'inégalité suivante, où la variable q joue le rôle de la variable r de la majoration (4.34),

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} \Big|E(x,y;a,q)\Big| &\leq \sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} \Big|\sum_{n\in S(x,y)} E(n;a,q)\Big| + \sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} \frac{1}{\varphi(q)}\Big| \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,q)=1}} \sum_{\substack{\chi \text{ primitif}\\ 1<\mathrm{cond}(\chi)\leq x^{\varepsilon}\\ \mathrm{cond}(\chi)\mid q}} \chi(n)\overline{\chi(a)}\Big| \\ &\leq \sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} \Big|\sum_{n\in S(x,y)} E(n;a,q)\Big| + \sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0\\ \mathrm{cond}(\chi)\leq x^{\varepsilon}}} \Big|\sum_{n\in S(x,y)} \chi(n)\Big|.\end{aligned}$$

Les calculs faits dans la section 3.3 de [Har12a] (*cf.* en particulier la formule (3.1), et le fait qu'elle est valable pour $Q\leq x$) impliquent

$$\sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0\\ \mathrm{cond}(\chi)\leq x^{\varepsilon}}} \Big|\sum_{n\in S(x,y)} \chi(n)\Big| \ll_A \Psi(x,y)\Big\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta}\Big\}$$

pour tout $A\geq 0$ (la constante étant effective si $A<1$), quitte à diminuer la valeur de δ et augmenter celle de c. L'inégalité $x^{1-\delta/2} \ll \Psi(x,y)y^{-\delta/4}$ permet de conclure : on a lorsque $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$,

$$\sum_{\substack{q\leq x^{3/5-6\varepsilon}\\(q,a)=1}} |E(x,y;a,q)| \ll_A \Psi(x,y)\Big\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta/4}\Big\}.$$

Lorsque $|a|\leq x^{1-\varepsilon}$, on montre par une méthode identique, mais en utilisant l'estimation (4.31) de la Proposition 4.4, que

$$\sum_{\substack{q\leq x^{6/11-7\varepsilon}\\(q,a)=1}} |E(x,y;a,q)| \ll_A \Psi(x,y)\Big\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta/4}\Big\}.$$

$\square$

4.4 Applications au problème des diviseurs de Titchmarsh des entiers friables

Pour énoncer le résultat de cette section, on reprend quelques notations de [FT90]. On définit

$$\begin{aligned} A_0 &:= \prod_p \Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big), \qquad A_1 := \gamma - \sum_p \frac{\log p}{1+p(p-1)},\\ g(n) &:= \prod_{p|n}\Big(1-\frac{p}{1+p(p-1)}\Big), \qquad h(n) := \sum_{p|n} \frac{p^2\log p}{(p-1)[1+p(p-1)]},\\ M_0(t) &:= \frac{A_0}{t}\sum_{n\le t} g(n), \\ M_1(t) &:= 2A_1M_0(t) + \frac{2A_0}{t}\sum_{n\le t} g(n)h(n) - \frac{1}{t}\int_1^t M_0(v)\mathrm{d}v,\\ T_i(x,y) &:= x\int_{0-}^{+\infty} \rho(u-v)\mathrm{d}M_i(y^v) \quad (i\in\{0,1\}). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Proposition 4.5. *(i) Il existe un réel $c>0$ tel que lorsque $(\log x)^c \le \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$, on ait*

$$T(x,y) = C(\alpha)\Psi(x,y)\log x\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}. \tag{4.36}$$

(ii) Pour la même constante c, il existe $\delta>0$ tel que pour tous $\varepsilon>0, A\ge 0$ fixés, lorsque (x,y) est dans le domaine (H_ε) et $y\le x^{1/c}$, on ait

$$T(x,y) = T_0(x,y)\log x + T_1(x,y) + O_{\varepsilon,A}\big(\Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + \exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}\}\big), \tag{4.37}$$

où la constante implicite est effective si $A<1/3$.

Démonstration que la Proposition 4.5 implique le Théorème 4.2. Soit c le réel donné par la Proposition 4.5. Lorsque $y\ge x^{1/c}$, le théorème 1 de [FT90] s'applique et entraine la validité de (4.7) dans ce domaine.

Lorsque $\exp\{\sqrt{\log x\log_2 x}\}\le y\le x^{1/c}$, le théorème 2 de [FT90] fournit

$$T_0(x,y)\log x + T_1(x,y) = \Psi(x,y)\log x\Big\{1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Or $(\log x)^{-1}+y^{-\delta}\ll \log(u+1)/\log y$, l'estimation (4.7) découle donc immédiatement du point (ii) de la Proposition 4.5.

Lorsque $(\log x)^c\le y\le \exp\{\sqrt{\log x\log_2 x}\}$, on a $1/u \ll \log(u+1)/\log y$, le point (i) de la Proposition 4.5 implique donc la validité de l'estimation (4.7). □

Démonstration de la Proposition 4.5. On a pour tout $z\ge 1$ et $m\in\mathbf{N}$,

$$\tau(m) = \sum_{\substack{r|m\\ r\le z}} 1 + \sum_{\substack{r|m\\ r<m/z}} 1.$$

On a donc pour $2 \leq y \leq x$, en intervertissant les sommations,

$$\begin{aligned} T(x,y) := \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ n>1}} \tau(n-1) &= \sum_{r \leq z} \sum_{\substack{n \in S(x,y), n>1 \\ n \equiv 1 \pmod r}} 1 + \sum_{r<(x-1)/z} \sum_{\substack{rz<n\leq x \\ P^+(n) \leq y \\ n \equiv 1 \pmod r}} 1 \\ &= \sum_{r \leq z} \Psi(x,y;1,r) + \sum_{r \leq x/z} \{\Psi(x,y;1,r) - \Psi(rz,y;1,r)\} + O(z) \end{aligned}$$

On choisit $z = \sqrt{x}$. Le Théorème 4.1 assure l'existence de $\delta, c > 0$ tels que pour tout $A \geq 0$,

$$\sum_{r \leq \sqrt{x}} \Big| \Psi(x,y;1,r) - \frac{1}{\varphi(r)} \Psi_r(x,y) \Big| \ll \Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta}\}$$

uniformément lorsque $(\log x)^c \leq y \leq x^{1/c}$, ce que l'on suppose dorénavant. On pose

$$\Delta := 1 + H(u)^{-\delta/2}(\log x)^{-A/2} + y^{-\delta/2} \quad \text{et} \quad J := \lfloor \log \sqrt{x} / \log \Delta \rfloor + 1,$$

ainsi que

$$\mathcal{R} := \sum_{r \leq \sqrt{x}} \Psi(r\sqrt{x},y;1,r) - \frac{\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)} = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\sqrt{x}\Delta^{-j-1} < r \leq \sqrt{x}\Delta^{-j}} \Psi(r\sqrt{x},y;1,r) - \frac{\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)}.$$

On encadre $\mathcal{R}$ comme suit :

$$\mathcal{R} \leq \mathcal{R}_+ := \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\sqrt{x}\Delta^{-j-1} < r \leq \sqrt{x}\Delta^{-j}} \Psi(x\Delta^{-j},y;1,r) - \frac{\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)},$$

$$\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_- := \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\sqrt{x}\Delta^{-j-1} < r \leq \sqrt{x}\Delta^{-j}} \Psi(x\Delta^{-j-1},y;1,r) - \frac{\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)}.$$

On a d'une part

$$|\mathcal{R}_+| \leq \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\sqrt{x}\Delta^{-j-1} < r \leq \sqrt{x}\Delta^{-j}} \Big| \Psi(x\Delta^{-j},y;1,r) - \frac{\Psi_r(x\Delta^{-j},y)}{\varphi(r)} \Big| + \frac{\Psi_r(x\Delta^{-j},y) - \Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)}.$$

Pour tout $j \in \{0, \ldots, J-1\}$, on a $\sqrt{x}\Delta^{-j} \leq (x\Delta^{-j})^{1/2}$, donc grâce au Théorème 4.1 et au point (i) du Lemme 4.1,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\sqrt{x}\Delta^{-j-1} < r \leq \sqrt{x}\Delta^{-j}} \Big| \Psi(x\Delta^{-j},y;1,r) - \frac{\Psi_r(x\Delta^{-j},y)}{\varphi(r)} \Big| \\ &\ll \sum_{j=0}^{J-1} \Delta^{-j\alpha} \Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A} + y^{-\delta}\} \ll \Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta/2}(\log x)^{-A/2} + y^{-\delta/2}\}. \end{aligned}$$

D'après [Hil85, theorem 4], on a

$$\Psi_r(x\Delta^{-j},y) - \Psi_r(r\sqrt{x},y) \leq \Psi(x\Delta^{-j},y) - \Psi(r\sqrt{x},y) \leq \Psi(\sqrt{x}(\sqrt{x}\Delta^{-j} - r),y).$$

Le point (i) du Lemme 4.1 montre que cela est

$$O((\Delta-1)^\alpha \Delta^{-\alpha j} \Psi(x,y)) = O(\Psi(x,y)\Delta^{-\alpha j}\{H(u)^{-\alpha\delta/2}(\log x)^{-\alpha/2} + y^{-\alpha\delta/2}\}),$$

ainsi, en utilisant $\sum_{r\leq\sqrt{x}} r^\alpha/\varphi(r) \asymp x^{\alpha/2}$, on a

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\sqrt{x}\Delta^{-j-1}<r\leq\sqrt{x}\Delta^{-j}} \frac{\Psi_r(x\Delta^{-j},y)-\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)} \ll \Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta/3}(\log x)^{-A/3}+y^{-\delta/3}\}.$$

et finalement $\mathcal{R}_+ \ll \Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta/3}(\log x)^{-A/3}+y^{-\delta/3}\}$ quitte à augmenter la valeur de c. Le terme $\mathcal{R}_-$ se majore de façon identique. On a donc

$$T(x,y) = \sum_{r\leq\sqrt{x}} \frac{2\Psi_r(x,y)-\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)} + O(\Psi(x,y)\{H(u)^{-\delta/3}(\log x)^{-A/3}+y^{-\delta/3}\}). \tag{4.38}$$

On note $\widetilde{T}(x,y)$ le terme principal du membre de droite.

On suppose dans un premier temps $(\log x)^c \leq y \leq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$. Pour $r \leq x$, on a $\omega(r) \leq \sqrt{y}$ quitte à supposer $c \geq 2$. On note

$$r_y := \prod_{\substack{p^\nu \| r\\ p\leq y}} p^\nu.$$

Le point (ii) du Lemme 4.1 fournit pour tout r,

$$\Psi_r(x,y) = \Psi_{r_y}(x,y) = g_{r_y}(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1+O\Big(\frac{E_{r_y}(1+E_{r_y})}{u}\Big)\Big\}$$

où E_m vérifie

$$E_m(1+E_m) \ll \frac{\exp\Big\{4\log(\omega(m)+2)\frac{\log u}{\log y}\Big\}}{(\log u)^2} \ll \frac{\omega(m)}{(\log u)^2}$$

quitte à supposer c suffisamment grand. On a alors

$$\sum_{r\leq\sqrt{x}} \frac{E_{r_y}(1+E_{r_y})}{\varphi(r)} \ll \frac{1}{(\log u)^2}\sum_{r\leq\sqrt{x}}\frac{\omega(r_y)}{\varphi(r)} \ll \frac{1}{(\log u)^2}\sum_{p\leq y}\frac{1}{p-1}\sum_{r\leq\sqrt{x}/p}\frac{1}{\varphi(r)} \ll \frac{\log_2 y\log x}{(\log u)^2}$$

et cela est $O(\log x)$ grâce à notre hypothèse sur y. Par ailleurs, le point (i) du Lemme 4.1 et une intégration par parties fournissent

$$\sum_{r\leq\sqrt{x}}\frac{\Psi_r(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)} \ll \Psi(x,y)x^{-\alpha/2}\sum_{r\leq\sqrt{x}}\frac{r^\alpha}{\varphi(r)} \ll \Psi(x,y).$$

Ainsi,

$$\widetilde{T}(x,y) = 2\Psi(x,y)\sum_{r\leq\sqrt{x}}\frac{g_{r_y}(\alpha)}{\varphi(r)} + O(\Psi(x,y)\log y).$$

Une analyse classique, similaire par exemple à la démonstration du Lemme 3.1 de [FT90], fournit uniformément pour $(\log x)^2 \leq y \leq x$

$$\begin{aligned}\sum_{r\leq\sqrt{x}}\frac{g_{r_y}(\alpha)}{\varphi(r)} &= \prod_{p\leq y}\Big(1-\frac{p^{-\alpha}-p^{-1}}{p-1}\Big)\prod_{p>y}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)\log\sqrt{x}+O(1)\\ &= C(\alpha)\log\sqrt{x}+O(1)\end{aligned}$$

On a donc $\widetilde{T}(x,y) = C(\alpha)\Psi(x,y)\log x + O\big(\Psi(x,y)\log y\big)$ et en injectant cela dans (4.38) on obtient l'estimation (4.36).

On suppose maintenant $(x,y) \in (H_\varepsilon)$. Le point (iii) du Lemme 4.1 fournit

$$\Psi_r(x,y) = \Psi_{r_y}(x,y) = \Lambda_{r_y}(x,y) + O(\Psi(x,y)\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon/3}\}(g_{r_y}(\alpha))^{-1}),$$

on a donc en supposant ε suffisamment petit,

$$\widetilde{T}(x,y) = \sum_{r\leq\sqrt{x}} \frac{2\Lambda_{r_y}(x,y) - \Lambda_{r_y}(r\sqrt{x},y)}{\varphi(r)} + O(\Psi(x,y)\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}).$$

En utilisant la définition de $\Lambda_m(x,y)$, on obtient

$$\widetilde{T}(x,y) = x\int_{-\infty}^{\infty} \rho(u-v)\mathrm{d}W(y^v;x,y) + O(\Psi(x,y)\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\})$$

avec

$$W(t;x,y) := \frac{1}{t}\sum_{n\leq t}\Big\{2\sum_{\substack{r\leq\sqrt{x}\\(r_y,n)=1}}\frac{1}{\varphi(r)} - \sum_{\substack{n\sqrt{x}t^{-1}<r\leq\sqrt{x}\\(r_y,n)=1}}\frac{1}{\varphi(r)}\Big\}.$$

On a $(r_y,n)=1 \Leftrightarrow (r,n_y)=1$, de sorte que le lemme 3.1 de [FT90] fournit pour $t\leq x$

$$W(t;x,y) = \frac{A_0}{t}\sum_{n\leq t} g(n_y)\Big\{\log x + 2h(n_y) + 2A_1 - \log\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big\} + O(x^{-1/3+\varepsilon}),$$

où les quantités $g(n), h(n), A_0$ et A_1 sont définies par (4.35).

Pour tout $z\in\mathbf{C}$ avec $|z|\leq 1$, on pose $f_z(n) := g(n)\exp\{zh(n)\}$ qui est une fonction entière de z. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a

$$|f_z(n)| \leq \prod_{p|n}\Big(1-\frac{p}{1+p(p-1)}\Big)\exp\Big(\frac{p^2\log p}{(p-1)[1+p(p-1)]}\Big) \ll \prod_{p|n}\Big(1+\frac{\log p}{p}\Big) = O(\log n).$$

Soient $F_{z,y}(s)$ et $F_z(s)$ les séries de Dirichlet associées respectivement aux fonctions multiplicatives $n\mapsto f_z(n_y)$ et $n\mapsto f_z(n)$. Elles sont absolument convergentes pour $\mathfrak{Re}(s)>1$. Avec $\kappa := 1+1/\log x$, une formule effective de Perron (par exemple [Ten07, corollaire II.2.4]) fournit pour $t\leq x$,

$$\sum_{n\leq t} f_z(n_y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-ix^2}^{\kappa+ix^2} F_{z,y}(s)\frac{t^s\mathrm{d}s}{s} + O(1)$$

$$\sum_{n\leq t} f_z(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-ix^2}^{\kappa+ix^2} F_z(s)\frac{t^s\mathrm{d}s}{s} + O(1).$$

On vérifie que l'on a

$$F_{z,y}(s) = F_z(s)\prod_{p>y}\Big(1+O\Big(\frac{\log p}{p^{\sigma+1}}+\frac{1}{p^{2\sigma}}\Big)\Big)$$

Le théorème des nombres premiers fournit donc

$$F_{z,y}(s) = F_z(s)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{y^{2\sigma-1}}\Big)\Big\}$$

et on obtient pour $1 \leq t \leq x$ l'estimation

$$\sum_{n\leq t} f_z(n_y) = \sum_{n\leq t} f_z(n) + O\Big(\frac{t}{y}\int_{-x^2}^{x^2} \sum_{n\geq 1} \frac{|f_z(n)|}{n^\kappa} \frac{\mathrm{d}\tau}{1+|\tau|} + 1\Big).$$

Lorsque $t \leq y$, les deux termes principaux sont égaux : le terme d'erreur est donc $O(t(\log x)^3/y)$. De même que dans [FT90], le cas $z = 0$ fournit directement

$$\frac{1}{t}\sum_{n\leq t} g(n_y) = \frac{1}{t}\sum_{n\leq t} g(n) + O\Big(\frac{(\log x)^3}{y}\Big) \qquad (t \leq x), \tag{4.39}$$

tandis que les formules de Cauchy

$$\sum_{n\leq t} g(n_y)h(n_y) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \sum_{n\leq t} f_z(n_y)\frac{\mathrm{d}z}{z^2}, \qquad \sum_{n\leq t} g(n)h(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \sum_{n\leq t} f_z(n)\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$$

fournissent

$$\frac{1}{t}\sum_{n\leq t} g(n_y)h(n_y) = \frac{1}{t}\sum_{n\leq t} g(n)h(n) + O\Big(\frac{(\log x)^3}{y}\Big) \qquad (t \leq x). \tag{4.40}$$

Enfin, par une intégration par parties à partir de la formule (4.39), on a

$$\frac{1}{t}\sum_{n\leq t} g(n_y)\log\big(\frac{t}{n}\big) = \frac{1}{t}\sum_{n\leq t} g(n)\log\big(\frac{t}{n}\big) + O\Big(\frac{(\log x)^4}{y}\Big) \qquad (t \leq x). \tag{4.41}$$

Les formules (4.39), (4.40) et (4.41) fournissent pour $t \leq x$

$$\begin{aligned} W(t;x,y) &= \frac{A_0}{t}\sum_{n\leq t} g(n)\Big\{\log x + 2h(n) + 2A_1 - \log\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big\} + O(x^{-1/3+\varepsilon} + (\log x)^4 y^{-1}) \\ &= M_0(t)\log x + M_1(t) + O(x^{-1/3+\varepsilon} + (\log x)^4 y^{-1}), \end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient

$$\widetilde{T}(x,y) = T_0(x,y)\log x + T_1(x,y) + O(\Psi(x,y)\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\})$$

puisque $x^{-1/3+\varepsilon} + (\log x)^4 y^{-1} \ll \exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}$. En injectant cela dans (4.38), on obtient le point (ii) de la Proposition 4.5. $\square$

Bibliographie

[Bas10] J. Basquin : Valeurs moyennes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés. *Acta Arith.*, 145:285–304, 2010.

[BFI86] E. Bombieri, J. B. Friedlander et H. Iwaniec : Primes in arithmetic progressions to large moduli. *Acta Math.*, 156(1):203–251, 1986.

[BFI87] E. Bombieri, J. B. Friedlander et H. Iwaniec : Primes in arithmetic progressions to large moduli. II. *Math. Ann.*, 277(3):361–393, 1987.

[BFI89] E. Bombieri, J. B. Friedlander et H. Iwaniec : Primes in arithmetic progressions to large moduli. III. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(2):215–224, 1989.

[Bur57] D. A. Burgess : The distribution of quadratic residues and non-residues. *Mathematika*, 4:106–112, 1957.

[Che78] J. R. Chen : On the Goldbach's problem and the sieve methods. *Sci. Sinica*, 21(6):701–739, 1978.

[Dab75] H. Daboussi : Fonctions multiplicatives presque périodiques B. *In Astérisque*, volume 24-25, pages 321–324, 1975.

[Dav00] H. Davenport : *Multiplicative number theory*, volume 74. Springer Verlag, 2000.

[dB51] N. G. de Bruijn : On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$. *Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, 54:50–60, 1951.

[DHT82] Y. Dupain, R. Hall et G. Tenenbaum : Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs. *J. London Math. Soc.*, 2(3):397, 1982.

[DI83] J.-M. Deshouillers et H. Iwaniec : Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. *Invent. Math.*, 70(2):219–288, 1982/83.

[Dic30] K. Dickman : On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude. *Ark. Mat. Astr. Fys*, 22:1–14, 1930.

[dlB98] R. de la Bretèche : Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier. *Proc. London Math. Soc.*, 77(1):39–78, 1998.

[dlB99] R. de la Bretèche : Sommes sans grand facteur premier. *Acta Arith*, 88:1–14, 1999.

[dlBG12] R. de la Bretèche et A. Granville : Densité des friables. *Bulletin de la SMF*, 2012. à paraître.

[dlBT05a] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications. *Inventiones Math.*, 159(3):531–588, 2005.

[dlBT05b] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Propriétés statistiques des entiers friables. *The Ramanujan Journal*, 9(1):139–202, 2005.

[Dra13] S. Drappeau : Sur les solutions friables de l'équation $a+b=c$. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 154:439–463, 4 2013.

[FI80] É. Fouvry et H. Iwaniec : On a theorem of Bombieri-Vinogradov type. *Mathematika*, 27(2):135–152, 1980.

[FI83] É. Fouvry et H. Iwaniec : Primes in arithmetic progressions. *Acta Arith.*, 42(2):197–218, 1983.

[Fio12] D. Fiorilli : On a theorem of Bombieri, Friedlander, and Iwaniec. *Canad. J. Math.*, 64(5):1019–1035, 2012.

[Fou82] É. Fouvry : Répartition des suites dans les progressions arithmétiques. *Acta Arith.*, 41(4):359–382, 1982.

[Fou84] É. Fouvry : Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov. *Acta Math.*, 152(3-4):219–244, 1984.

[Fou85] É. Fouvry : Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh. *J. Reine Angew. Math.*, 357:51–76, 1985.

[FT90] É. Fouvry et G. Tenenbaum : Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier. *In Analytic number theory (Tokyo, 1988)*, volume 1434 de *Lecture Notes in Math.*, pages 86–102. Springer, Berlin, 1990.

[FT91] E. Fouvry et G. Tenenbaum : Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 3(3):449–494, 1991.

[FT96] É. Fouvry et G. Tenenbaum : Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(3):481–514, 1996.

[GPY09] D. A. Goldston, J. Pintz et C. Y. Yildirim : Primes in tuples. I. *Ann. of Math. (2)*, 170(2):819–862, 2009.

[Gra93a] A. Granville : Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. I. *Acta Math.*, 170(2):255–273, 1993.

[Gra93b] A. Granville : Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 345(1676):349–362, 1993.

[Gra08] A. Granville : Smooth numbers : computational number theory and beyond. *In Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography*, volume 44 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 267–323. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[Har12a] A. J. Harper : Bombieri-Vinogradov and Barban-Davenport-Halberstam type theorems for smooth numbers. *pré-publication*, 2012.

[Har12b] A. J. Harper : On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions. *J. Number Theory*, 132(1):182–199, 2012.

[Hil84] A. Hildebrand : Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis. *Mathematika*, 31(2):258–271, 1984.

[Hil85] A. Hildebrand : Integers free of large prime divisors in short intervals. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 36(141):57–69, 1985.

[Hil86] A. Hildebrand : On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$. *J. Number Theory*, 22(3):289–307, 1986.

[HSF10] L. Habsieger et J. Sivak-Fischler : An effective version of the Bombieri-Vinogradov theorem, and applications to Chen's theorem and to sums of primes and powers of two. *Arch. Math. (Basel)*, 95(6):557–566, 2010.

[HT86] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM : On integers free of large prime factors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(01):265–290, 1986.

[HT93] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM : Integers without large prime factors. *J. de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 5:411–484, 1993.

[Hux74] M. N. HUXLEY : Large values of Dirichlet polynomials (iii). *Acta Arith.*, 26:435–444, 1974.

[IK04] H. IWANIEC et E. KOWALSKI : *Analytic number theory*, volume 53. Cambridge Univ Press, 2004.

[Jut77] M. JUTILA : On Linnik's constant. *Math. Scand.*, 41:45–62, 1977.

[Lan89] B. LANDREAU : A new proof of a theoreme of van der Corput. *Bull. London Math. Soc.*, 21:366–368, 1989.

[LS10] S. S. LOIPERDINGER et I. E. SHPARLINSKI : On the distribution of the Euler function of shifted smooth numbers. *Colloq. Math.*, 120(1):139–148, 2010.

[LS11] J. C. LAGARIAS et K. SOUNDARARAJAN : Smooth solutions to the *abc* equation : the xyz conjecture. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 23(1):209–234, 2011.

[LS12] J. C. LAGARIAS et K. SOUNDARARAJAN : Counting smooth solutions to the equation $A + B = C$. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 104(4):770–798, 2012.

[MV06] H. MONTGOMERY et R. VAUGHAN : *Multiplicative number theory I : Classical theory*, volume 97. Cambridge University Press, 2006.

[Oes88] J. OESTERLÉ : Nouvelles aproches du "théoreme" de Fermat, Séminaire Bourbaki no. 694 (1987-88). *Astérisque*, pages 161–162, 1988.

[Ran38] R. RANKIN : The difference between consecutive prime numbers. *J. London Math. Soc.*, 1(4):242–247, 1938.

[Sai89] É. SAIAS : Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier. *J. Number Theory*, 32(1):78–99, 1989.

[Sar95] P. SARNAK : Selberg's eigenvalue conjecture. *Notices Amer. Math. Soc.*, 42(11): 1272–1277, 1995.

[Sou08] K. SOUNDARARAJAN : The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions. *In Anatomy of integers*, volume 46 de *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 115–128. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[Ten90] G. TENENBAUM : Sur un probleme d'Erdös et Alladi. *Prog. Math.*, 91:221–239, 1990.

[Ten07] G. TENENBAUM : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Belin, troisième édition, 2007.

[Wei48] A. WEIL : On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 34(5):204, 1948.

[Wol73] D. WOLKE : Über die mittlere Verteilung der Werte zahlentheoretischer Funktionen auf Restklassen. I. *Math. Ann.*, 202:1–25, 1973.

[Zha13] Y. ZHANG : Bounded gaps between primes. *Annals of Math.*, à paraître, 2013.