ED 184 Mathématiques et informatique de Marseille
Institut de Mathématiques de Marseille (UMR7373)

Mémoire présenté pour obtenir
l'habilitation à diriger des recherches

Discipline : Mathématiques

Sary DRAPPEAU

Indépendance statistique et lois limites pour quelques objets arithmétiques

Statistical independence and limit laws
for some arithmetical objects

Soutenu le 28 septembre 2023 devant le jury composé de :

Valérie BERTHÉ	CNRS	Rapporteure
Valentin BLOMER	Université de Bonn	Rapporteur
Régis DE LA BRETÈCHE	Université Paris Cité	
Étienne FOUVRY	Université Paris Sud	
Florent JOUVE	Université de Bordeaux	
Kaisa MATOMÄKI	Université de Turku	Rapporteure
Philippe MICHEL	École Polytechnique Fédérale de Lausanne	
Joël RIVAT	Université d'Aix-Marseille	
Emmanuel ROYER	Université Clermont-Auvergne et CNRS	

Remerciements

Je suis tout d'abord redevable à Joël Rivat, Étienne Fouvry et Régis de la Bretèche pour leurs subtiles incitations, leurs précieux conseils et leurs encouragements durant tout le processus de HDR.

I'm grateful to Valérie Berthé, Valentin Blomer and Kaisa Matomäki for their time, and sincerely honoured that they agreed to report on the manuscript.

Je remercie vivement Florent Jouve, Philippe Michel et Emmanuel Royer pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie encore Mme Tinel pour toute son aide au bureau des HDR.

Faire des mathématiques serait une activité bien morne si l'on ne pouvait la vivre avec les collègues. Je remercie donc toutes les personnes avec qui j'ai pu partager l'envie de comprendre, l'enthousiasme et l'émerveillement, que cela ait mené à un papier ou non. Je remercie en particulier Olivier Ramaré pour d'innombrables discussions éclairantes sur la théorie analytique des nombres ; et Brigitte Vallée pour avoir pris le temps de donner de nombreuses explications sur ses travaux.

Je remercie enfin mes collègues de l'I2M pour l'atmosphère conviviale, qui fait que ça vaut largement la peine de prendre le B1 en heure de pointe ou de cohabiter avec des marteaux-piqueurs.

Résumé

Ce mémoire présente les thèmes sur lesquels ont porté mes travaux de recherche depuis mon arrivée à l'université d'Aix-Marseille en 2015. Leur problématique commune est de mettre en évidence des comportements statistiques réguliers dans des familles d'objets arithmétiques naturels : les fonctions multiplicatives ou additives, et les valeurs centrales de certaines familles de fonctions L.

La première partie concerne une question centrale en théorie multiplicative des nombres : celle d'estimer la corrélation des valeurs $f(n)$ et $g(n+1)$, où f et g sont deux fonctions multiplicatives, notamment lorsque l'une des deux fonctions est la fonction « nombre de diviseurs ». Ce problème est naturellement lié à la répartition de certaines suites dans les progressions arithmétiques, et trouvent des applications à d'autres questions arithmétiques, par exemple les zéros de petite hauteur des fonctions L de Dirichlet. Les majorations de sommes d'exponentielles algébriques sont un outil crucial dans cette partie du mémoire.

La seconde partie concerne certaines fonctions $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{C}$ nommées par Zagier « formes modulaires quantiques », caractérisées par certaines symétries analogues à celles des formes modulaires. Mes collaborations sur ce sujet ont consisté d'une part à établir ces relations de modularité quantiques dans certains cas : celui de tordues additives de fonctions L de Dirichlet, et celui de sommes de symboles de Pochhammer ; et d'autre part à les utiliser pour en déduire, par des méthodes de systèmes dynamiques, l'existence de lois limites pour les valeurs de f aux nombres rationnels ordonnés par dénominateurs croissants.

Mots clés : Fonctions multiplicatives, nombres premiers, progressions arithmétiques, sommes de Kloosterman, formes modulaires, formule de Kuznetsov, tordue additive, forme modulaire quantique, loi limite, invariant de Kashaev.

Abstract

This manuscript presents the themes of my research works in Aix-Marseille university since 2015. Their common theme is the search for simple statistical behaviour among families of natural arithmetical objects: multiplicative or additive functions, functions defined in terms of numeration systems (decimal, continued fractions...) and central values of L-functions.

The first part concerns a key question in multiplicative number theory: to estimate the correlation of values of $f(n)$ and $g(n+1)$, where f and g are two multiplicative functions, with an emphasis on the case of the divisor function. This naturally involves bounds on algebraic exponential sums, and leads to applications in various problems, all linked in some way to the distribution of certain sequences in arithmetic progressions.

The second part concerns maps $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{C}$ called by Zagier “quantum modular forms”, which satisfy certain symetries analogous to those satisfied by modular forms. In several collaborations, we established the modular quantum behaviour in some cases related to additive twists of central L values, or to Pochhammer symbols, and we deduced through methods from dynamical systems the existence of limit laws for values of f along rationals ordered by denominators.

Keywords: multiplicative functions, prime numbers, arithmetic progressions, Kloosterman sums, modular form, Kuznetsov formula, additive twist, quantum modular form, limit law, Kashaev invariant

Table des matières

Introduction

Ce mémoire présente les résultats obtenus depuis 2015 dans le cadre de mes recherches en théorie analytique des nombres. Leur socle commun est la mise en évidence de lois limites dans des familles d'objets arithmétiques naturels : les fonctions multiplicatives ou additives, les fonctions définies en termes de systèmes de numération (décimal, fractions continues...), les valeurs centrales de familles de fonctions L.

La première partie du mémoire est centrée sur la question d'estimer asymptotiquement la corrélation

$$C(f, g; x) := \sum_{n \leq x} f(n) g(n+1)$$

lorsque f et g sont des fonctions multiplicatives. Heuristiquement, l'on s'attend à ce que les factorisations de n et de $n+1$ soient statistiquement indépendantes en moyenne sur n. On s'attend donc à ce que $C(f, g; x)$ soit comparable au produit des moyennes de f et de g jusqu'à x, c'est-à-dire

$$C(f, g; x) \asymp x^{-1} C(f, 1; x) C(1, g; x).$$

Nous nous concentrons sur le cas particulier où $f(n) = \tau(n) = \sum_{d|n} 1$, la fonction nombre de diviseurs, et où les valeurs $g(p)$ ont une description simple. Ce cas est d'une importance particulière puisque qu'il délimite le seuil au-delà duquel les méthodes analytiques connues actuellement sont essentiellement inefficaces. Les progrès les plus significatifs sur cette question ont été réalisés dans les années 1980, avec le développement des méthodes provenant des formes automorphes pour étudier certaines sommes d'exponentielles algébriques qui interviennent naturellement.

Dans la section 1.1, nous présentons une généralisation des résultats de Deshouillers et Iwaniec sur les coefficients de Fourier de formes modulaires, et des majorations de sommes de Kloosterman qui en découlent par la formule de Kuznetsov. Ces estimations seront ensuite employées pour en déduire un résultat arithmétique sur la majoration en moyenne des sommes de Kloosterman sous l'hypothèse de zéros de Siegel, obtenu avec J. Maynard.

Dans la section 1.2, nous revenons à l'estimation de $C(\tau, g; x)$, et nous présentons des travaux qui répondent à deux questions naturelles : l'influence de la localisation des zéros des fonctions L de Dirichlet sur le terme d'erreur dans l'estimation de $C(\tau, g; x)$; et une caractérisation simple des fonctions g pour lesquelles nous sommes actuellement en mesure d'estimer précisément $C(\tau, g; x)$. Le premier travail repose sur les majorations de sommes de Kloosterman évoquées ci-dessus. Le second, obtenu avec B. Topacogullari, dépend de nouvelles décompositions combinatoires pour certaines fonctions multiplicatives.

Dans la section 1.3, nous présentons un travail avec K. Pratt et M. Radziwiłł qui porte sur la densité des zéros de fonctions L de Dirichlet au voisinage de l'axe réel, en moyenne sur le caractère et le module. Les majorations de sommes de Kloosterman permettront d'estimer cette densité pour des fonctions test dont le support de la transformée de Fourier est élargi au-delà du domaine permis par les inégalités de grand crible.

Enfin, dans la section 1.4, nous présentons un travail avec R. de la Bretèche sur la répartition de valeurs de polynômes quadratiques dans des progressions arithmétiques, qui repose également sur les majorations de sommes de Kloosterman évoquées ci-dessus. En corollaire de ce travail, nous avons précisé un résultat de Deshouillers et Iwaniec sur le plus grand facteur premier de $n^2 + 1$.

La seconde partie du mémoire est centrée sur l'existence de lois limites pour certaines fonctions sur les rationnels.

Le premier résultat de cette seconde partie concerne la répartition des valeurs des fonctions $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{C}$ telles que pour toute homographie $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$ les fonctions $h_\gamma(x) := f(x) - f(\gamma x)$ soient régulières, en un sens précis. Ces fonctions ont été nommées par Zagier "formes modulaires quantiques" (de poids 0 et niveau 1) car certains exemples proviennent d'invariants quantiques en théorie des nœuds. En utilisant l'algorithme d'Euclide et les propriétés dynamiques de l'application de Gauss, nous montrons sous des hypothèses assez générales sur les fonctions h_γ, que les valeurs de $f(x)$ pour x variant parmi les nombres rationnels de dénominateurs au plus Q se répartissent suivant une loi stable lorsque $Q \to \infty$. Ce formalisme nous permet d'étudier la fonction d'Esterman, qui est la valeur au point central $s = 1/2$ de la "tordue additive" de la fonction $\zeta(s)^2$,

$$D(s, x) := \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s} \mathrm{e}^{2\pi i n x}.$$

Cette série ne possède pas de produit eulérien ; par contre, la fonction $x \mapsto D(1/2, x)$ est une forme modulaire quantique à laquelle nos résultats s'appliquent. La méthode est essentiellement dynamique, l'arithmétique intervenant uniquement pour prouver la modularité quantique de la fonction $x \mapsto D(\frac{1}{2}, x)$.

Notre second résultat concerne le q-analogue du symbole de Pochhammer,

$$(q)_n = \prod_{r=1}^{n} (1 - q^r),$$

lorsque q est une racine de l'unité. Nous montrons que les fonctions qui à $x \in \mathbf{Q}$

associent respectivement $(\mathrm{e}(x))_n$ et $(\mathrm{e}(\bar{x}))_n$ (où $\overline{h/k} = (h^{-1} \mod k)/k \pmod 1$) satisfont chacune, pour tout $\gamma \in PSL_2(\mathbf{Z})$, une formule de modularité qui relient leurs valeurs en x et en γx. Ces deux formules sont cousines de l'équation de modularité de la fonction η de Dedekind et en partagent certains aspects. Ces formules sont cohérentes avec la conjecture de modularité de Zagier sur les invariants de Kashaev de nœuds hyperbolique. Nous montrons, en utilisant ces formules, que les invariants de Kashaev du nœud de huit

$$J_{4_1,0}(x) = \sum_{n\geq 0} |(\mathrm{e}(x))_n|^2$$

ont, pour presque tout nombre rationnel x (en un sens précis), un comportement asymptotique qui s'exprime en termes très simples du développement en fraction continue de x.

1 Sommes d'exponentielles et indépendence statistique de fonctions arithmétiques

1.1 Sommes de Kloosterman

1.1.1 Majoration en moyenne

Pour tout $q \in \mathbf{N}_{>0}$ et $a, b \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, on définit la *somme de Kloosterman* (Kloosterman 1927)

$$S(a, b; q) := \sum_{n \in (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times} \mathrm{e}\left(\frac{an + bn^{-1}}{q}\right)$$

où $\mathrm{e}(x) := \mathrm{e}^{2\pi i x}$, et n^{-1} désigne un inverse de n modulo q. Nous avons bien entendu la majoration triviale

$$|S(a, b; q)| \leq \varphi(q).$$

Tout amélioration de cette inégalité est susceptible de nous renseigner sur le caractère pseudo-aléatoire de la suite (n^{-1}) lorsque n parcourt $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^\times$. Nous avons en toute généralité la borne de Weil (Weil 1948) : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|S(a, b; q)| \ll_\varepsilon q^{1/2+\epsilon}, \qquad ((a, b, q) = 1)$$

où (a, b, q) désigne le pgcd. L'exposant $1/2$ est optimal. Lorsque a, b sont non nuls et fixés, et que l'on somme sur q, nous pouvons nous attendre à des compensations supplémentaires. Le premier résultat de ce type est du à Kuznetsov (Kuznetsov 1981), et affirme que pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0$,

$$\left| \sum_{q \leq x} \frac{S(a, b; q)}{q} \right| \ll_{\varepsilon, a, b} x^{1/6+\varepsilon}.$$

Cette piste a été développée de manière systématique par Deshouillers-Iwaniec (Deshouillers ; Iwaniec 1982a) (voir aussi (Iwaniec 1982)). Ces idées ont prospéré et ont contribué à certains des résultats les plus précis de la théorie analytique des nombres moderne (Bombieri ; Friedlander ; Iwaniec 1986 ; Young 2011 ; Pitt

2013 ; Bettin ; Bui ; Li et al. 2020 ; Pratt ; Robles ; Zaharescu et al. 2020 ; Assing ; Blomer ; Li 2021 ; Maynard 2020).

Les résultats de Deshouillers-Iwaniec (Deshouillers ; Iwaniec 1982a) concernent des sommes d'exponentielles de la forme suivante :

$$\sum_n \sum_c \sum_d \sum_r \sum_s \beta_{n,r,s} g(c,d)\, \mathrm{e}\Big(n\frac{\overline{(rd)}^{-1}}{sc}\Big),$$

où $(\beta_{n,r,s})$ est une suite à support fini, et g une fonction lisse à support compact. Le cas où $\beta_{n,r,s} = 1$ si $n = r = s = 1$ et 0 sinon, c'est-à-dire lorsque que la somme porte uniquement sur c et d, correspond à celui des sommes de sommes de Kloosterman considérées par Kuznetsov (Kuznetsov 1981), après une sommation de Poisson sur la variable d. La somme quintuple ci-dessus est une généralisation naturelle à un cadre réaliste, où les variables "lisses" c et d sont perturbées par convolution multiplicative.

Le résultat suivant est une généralisation du Theorem 12 de (Deshouillers ; Iwaniec 1982a). Il a été prouvé dans (Drappeau 2017), puis précisé dans (Drappeau ; Pratt ; Radziwiłł 2022).

Théorème 1 (Drappeau 2017). *Soient $C, D, N, R, S \geq 1$ et $q, c_0, d_0 \in \mathbf{N}$ avec $(q, c_0 d_0) = 1$. Soit $(b_{n,r,s})$ une suite à support dans $[1, N] \times [R, 2R] \times [S, 2S] \cap \mathbf{N}^3$. Soit $g : \mathbf{R}_+^5 \to \mathbf{C}$ une fonction lisse à support compact dans $[C, 2C] \times [D, 2D] \times (\mathbf{R}_+^*)^3$ qui satisfait la majoration*

$$\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5} g}{\partial c^{\nu_1} \partial d^{\nu_2} \partial n^{\nu_3} \partial r^{\nu_4} \partial s^{\nu_5}}(c,d,n,r,s) \ll_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5} \{c^{-\nu_1} d^{-\nu_2} n^{-\nu_3} r^{-\nu_4} s^{-\nu_5}\}^{1-\varepsilon_0} \tag{1.1}$$

pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ et tous $\nu_j \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{c \\ c \equiv c_0}} \sum_{\substack{d \\ \text{et } d \equiv d_0 \\ (qrd, sc)=1}} \sum_n \sum_{\substack{r \\ \bmod q}} \sum_s b_{n,r,s} g(c,d,n,r,s)\, \mathrm{e}\Big(n\frac{\overline{(rd)}^{-1}}{sc}\Big) \\ \ll_{\varepsilon,\varepsilon_0} (qCDNRS)^{\varepsilon+O(\varepsilon_0)} q^{3/2} K(C,D,N,R,S) \|b_{N,R,S}\|_2,\end{aligned}$$

où $\|b_{N,R,S}\|_2^2 = \sum_{n,r,s} |b_{n,r,s}|^2$, et

$$\begin{aligned}K(C,D,N,R,S)^2 = qCS(RS+N)(C+RD) \\ + C^{1+4\theta} DS((RS+N)R)^{1-2\theta}(1+\tfrac{qC}{RD})^{1-4\theta} + D^2 NR.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Signalons que dans un article récent, Assing, Blomer et Li (Assing ; Blomer ; Li 2021) prouvent une estimation qui généralise le Theorem 12 de (Deshouillers ; Iwaniec 1982a) dans une autre direction, liée à l'uniformité en n.

La principale différence par rapport à (Deshouillers ; Iwaniec 1982a, Theorem 12) tient en le fait que les variables c, d, attachées à un poids lisse, peuvent être restreintes à des progressions arithmétiques. L'idée principale pour ce faire, introduite par Blomer et Milićević (Blomer ; Miličević 2015), est d'utiliser la possibilité de faire varier le caractère central des formes automorphes pour $\Gamma_0(q)$ considérées dans (Deshouillers ; Iwaniec 1982a). La réussite de l'argument dépend ensuite d'un choix convenable de séries de Poincaré, dont le développement en série de Fourier autour de pointes bien choisies fera apparaître les sommes de Kloosterman voulues. L'utilité de ce cadre d'étude plus étendu s'est confirmé dans d'autres travaux récents sur les fonctions L modulaires, où la formule de Kuznetsov joue un rôle : citons (Kıral ; Young 2019), (Petrow ; Young 2020) et (Zacharias 2019).

Une différence plus accessoire est la dépendance en θ, qui est explicitée, là où la borne $\theta \leq 1/4$ de Selberg était utilisé dans (Deshouillers ; Iwaniec 1982a). Cela n'affecte que le second terme dans (1.2). Dans la plupart des applications, ce terme n'est pas le terme limitant, mais ce n'est pas systématiquement le cas, comme nous le verrons au théorème 6 ci-dessous.

Les majorations en moyenne du type du théorème 1 confèrent aux sommes de Kloosterman une place de choix dans la théorie analytique des nombres. Il serait extrêmement souhaitable de disposer d'estimations de la même qualité pour d'autres sommes d'exponentielles, comme les sommes de Birch, les sommes de Kloosterman de rang 3, ou par exemple les sommes d'exponentielles dont la phase paramétrise les solutions de $n^3 \equiv 2 \mod p$. Des travaux récents sur ce sujet ont notamment été menés par Buttcane (Buttcane 2022).

1.1.2 Valeur moyenne le long des nombres premiers et zéros de Siegel

Les travaux de Blomer et Milićević (Blomer ; Miličević 2015), auxquels il a été fait référence ci-dessus, permettent de majorer des sommes du type

$$\sum_{q \leq x} \chi(q) S(a, b; q), \tag{1.3}$$

dans laquelle χ est un caractère de Dirichlet. Il est naturel de se demander si la flexibilité permise par la présence du caractère χ permet d'obtenir de nouvelles applications arithmétiques. Un énoncé qu'il serait particulièrement souhaitable de démontrer est

$$\sum_{p \leq x} \frac{S(a, b; p)}{\sqrt{p}} \stackrel{?}{=} o(x / \log x), \tag{1.4}$$

où p désigne un nombre premier.

La question (1.4) est toujours ouverte. Elle découlerait de la conjecture de Satō-Tate “horizontale” énoncée par Katz (Katz 1980). En 2007, Fouvry et Michel (Fouvry ; Michel 2007) ont obtenu une majoration non-triviale lorsque la condition de primalité est relâchée à la condition que n appartient à l'ensemble P_k des entiers ayant au plus k facteurs premiers, pour tout nombre k suffisamment grand. Leur méthode a fait l'objet de plusieurs améliorations, et la meilleure valeur connue d'un k admissible est $k = 7$ par Xi (Xi 2018).

La possibilité d'exploiter la dépendance en le caractère χ dans (1.3) trouve une application dans la circonstance exceptionnelle où il existerait un caractère de Dirichlet prenant la valeur -1 anormalement souvent sur les nombres premiers. Plus précisément, on sait qu'il existe $c > 0$ tel que pour chaque $Q \geq 2$ et chaque caractère quadratique χ primitif et non trivial de module $q \leq Q$, l'inégalité

$$L(1, \chi) \geq c/\log q$$

a lieu à l'exception d'au plus un caractère χ, qui est alors quadratique. On conjecture que ces exceptions n'existent pas, et de fait l'hypothèse de Riemann généralisée pour les fonctions L de Dirichlet implique l'inégalité $L(1, \chi) \gg 1/\log\log q$; mais aucun progrès substantiel n'a été fait sur cette question depuis qu'elle a été posée. En toute généralité, la borne de Siegel $L(1, \chi) \gg_\varepsilon q^{-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, qui est non effective dès que $\varepsilon < 1/2$, est la meilleure connue.

Supposons que l'on ait une suite de caractères quadratiques primitifs $\chi_n \pmod{D_n}$ tels que $L(1, \chi_n) \log D_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Ces caractères fourniraient alors une famille de fonctions multiplicatives qui "imitent" la fonction de Möbius sur les entiers de taille $D_n^{O(1)}$, tout en étant d'une complexité analytique contrôlée puisque ce sont des fonctions périodiques de période D_n.

Cette idée a été poursuivie dans un travail fondateur de Heath-Brown en 1983 (Heath-Brown 1983), et plus récemment dans plusieurs travaux de Friedlander et Iwaniec (Friedlander ; Iwaniec 2004 ; Friedlander ; Iwaniec 2005 ; Friedlander ; Iwaniec 2013). Il résulte de ces travaux que l'existence de caractères de Siegel permet de résoudre plusieurs problèmes qui sont situés au-delà des méthodes d'analyse moderne : le problème des nombres premiers jumeaux (Heath-Brown 1983), ou en progressions arithmétiques de grands modules (Friedlander ; Iwaniec 2003), ou dans les très petits intervalles (Friedlander ; Iwaniec 2004).

Avec James Maynard, nous avons montré dans (Drappeau ; Maynard 2019) que l'existence de caractères exceptionnels entraînerait une majoration non-triviale des sommes de Kloosterman de modules premiers.

Théorème 2 (Drappeau ; Maynard 2019)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A, B > 0$ tels que pour tout caractère quadratique primitif $\chi \pmod{D}$ et tout $x \geq D^A$, l'on ait*

$$\left| \sum_{p \leq x} \frac{S(1, 1; p)}{\sqrt{p}} \right| \leq \pi(x)\big(\varepsilon + BL(1, \chi) \log x\big).$$

Puisque $|S(1, 1; p)| \leq 2\sqrt{p}$ par la majoration de Weil, l'énoncé précédent n'est non trivial qu'à condition qu'il existe une suite $\chi_n \pmod{D_n}$ de caractères quadratiques primitifs qui satisfasse $L(1, \chi_n) \log D_n \to 0$, autrement, sous l'existence de caractères de Siegel-Landau. L'estimation du théorème 2 est alors pertinente dans un intervalle de la forme $[D^A, D^C]$ avec C arbitraire mais fixé.

La stratégie de base est celle suivie par Heath-Brown (Heath-Brown 1983) et Friedlander-Iwaniec (Friedlander ; Iwaniec 2005 ; Friedlander ; Iwaniec 2004), qui consiste à approcher la fonction de van Mangoldt $\Lambda(n) = \log *\mu(n)$ par la convolution $\log *\chi(n)$. Du point de vue de la complexité analytique, cette dernière est comparable à la fonction diviseur $\mathbf{1} * \mathbf{1}(n)$. Le problème se ramène donc essentiellement à l'étude des sommes

$$\sum_{N<n\leq 2N} \sum_{M<m\leq 2M} S(1,1,mn).$$

Lorsque $M < N^{1-\varepsilon}$ ou $N < M^{1-\varepsilon}$, les estimations de Deshouillers-Iwaniec, du même type que le théorème 1, fournissent une majoration acceptable. Le principal obstacle est constitué par le cas $M = N$. Dans ce cas, nous ne parvenons pas à tirer partir des compensations dans le signe de la somme de Kloosterman. L'idée cruciale est de remplacer $\log(n/d)$ dans la convolution $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log(n/d)$, par $\log(\sqrt{n}/d)$. Ceci n'a aucun effet sur le reste des arguments, mais a l'avantage d'atténuer la contribution des d de l'ordre de $\sqrt{n}$, qui correspondent au cas problématique ci-dessus. Le reste de l'argument reprend une méthode de Fouvry-Michel (Fouvry ; Michel 2003), basée sur une idée de Hooley (Hooley 1964) et la coïncidence numérique $8 < 3\pi$, qui prouve que $|S(1,1,n)|$ devient négligeable, en moyenne sur n, à mesure que n possède de plus en plus de facteurs premiers. Cette idée se retrouve dans d'autres travaux dans le domaine, notamment un travail récent de Xi (Xi 2020) sur la non coïncidence entre sommes de Kloosterman et valeurs propres de Hecke-Maass.

1.2 Convolution décalée avec la fonction diviseur

1.2.1 Terme d'erreur dans le problème de Titchmarsh

Les majoration de sommes d'exponentielles du type du théorème 1 trouvent naturellement des applications à l'estimation de “convolutions décalées”

$$\sum_{n\leq x} f(n)g(n+1), \tag{1.5}$$

où f et g sont supposées multiplicatives, ou ayant un lien fort avec une fonction multiplicative, comme la fonction indicatrice des nombres premiers.

Une approche dans ce problème consiste à approcher f et g par des convolutions de Dirichlet non triviales, ce qui revient à factoriser $n = ab$ et $n+1 = cd$, puis à essayer de compter les solutions de l'équation $cd - ab = 1$ affectées de certains coefficients (Duke ; Friedlander ; Iwaniec 1994). Dans les cas les plus favorables, les coefficients varient de manière lisse avec a, b, c, d, et par analyse de Fourier, on se ramène à des sommes d'exponentielles qui sont du même type que les sommes de Kloosterman. Ceci explique que les estimations basées sur les sommes de Kloosterman trouvent un intérêt particulier en théorie analytique des nombres (Kowalski 2003).

La fonction diviseur $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$ peut être vue comme la fonction arithmétique la plus simple qui ne soit pas une perturbation d'une fonction constante. Les fonction diviseurs d'ordre supérieur, $\tau_k = \mathbf{1} * \cdots * \mathbf{1}$ (k fois) en sont des généralisations naturelles. La fonction indicatrice des nombres premiers $n \mapsto \mathbf{1}_{\mathcal{P}}(n)$, quant à elle, est vue comme une forme de limite des fonctions τ_k, au sens où si une question concernant une fonction f peut être résolue pour $f = \tau_k$, k arbitraire, avec une certaine uniformité en k, alors on peut espérer la résoudre pour $f = \mathbf{1}_{\mathcal{P}}$. Cette forme de vague classification des fonctions multiplicatives se matérialise dans des « identités combinatoires », les plus connues étant celles de Linnik, Vaughan et Heath-Brown, et dont il sera question dans cette section.

Le problème des diviseurs de Titchmarsh (Titchmarsh 1930) consiste à estimer la somme

$$T(x) := \sum_{p \leq x} \tau(p-1).$$

C'est un cas particulier du problème (1.5). La meilleure estimation connue

$$T(x) = c_1 x + c_2 \operatorname{li}(x) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^A}\Big) \tag{1.6}$$

est due indépendamment à Fouvry (Fouvry 1985) et Bombieri-Friedlander-Iwaniec (Bombieri ; Friedlander ; Iwaniec 1986). La forme du terme d'erreur découle de l'utilisation du théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, et de l'utilisation du théorème de Siegel-Walfisz. La question se pose naturellement de savoir si une hypothèse comme celle de Riemann sur la fonction ζ permet d'obtenir un terme d'erreur en puissance de x, comme c'est le cas dans le théorème des nombres premiers. Le résultat suivant, obtenu dans (Drappeau 2017), montre que la réponse est oui.

Théorème 3 (Drappeau 2017). *Supposons l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet. Alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$T(x) = c_1 x + c_2 \operatorname{li}(x) + O(x^{1-\delta}) \qquad (x \geq 2).$$

Ce résultat est celui qui avait motivé originellement le théorème 1. Une valeur effective de δ a été obtenue par Tang (Tang 2020). Il serait naturel de s'attendre à ce que le terme d'erreur optimal soit $x^{1/2}$, mais la meilleure valeur de δ que la méthode premettrait d'obtenir en est loin.

La stratégie est similaire à celle de Fouvry (Fouvry 1985) et Bombieri-Friedlander-Iwaniec (Bombieri ; Friedlander ; Iwaniec 1986), mais la contrainte d'obtenir un terme d'erreur en puissance de x nous impose d'éviter le recours à certaines techniques, de crible notamment. En tenant compte de ces contraintes, il apparaît que la somme d'exponentielles que l'on doit estimer *in fine* a une forme semblable à

$$\sum_{c,d,n,r,s} b_{n,r,s} g(c,d) \,\mathrm{e}\Big(\frac{n(sc)^{-1}}{rd} + \frac{(cd)^{-1}}{q}\Big) \tag{1.7}$$

où $q \geq 1$ est un entier relativement petit, de l'ordre de x^{ε}. Les travaux précédents (Fouvry 1985 ; Bombieri ; Friedlander ; Iwaniec 1986) utilisaient diverses réductions pour se réduire au cas $q = 1$, ce qui amenait la somme dans le giron des estimations originelles de Deshouillers-Iwaniec (Deshouillers ; Iwaniec 1982a). Mais cette réduction se fait au coût d'un terme d'erreur en $O(x\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}})$ dans le meilleur cas. En revanche, munis à présent du théorème 1, nous pouvons travailler directement avec la somme originelle (1.7) en séparant les sommes sur c et d suivant les classes de congruence modulo q, avec des termes d'erreurs en puissance de x tout au long de l'argument. C'est ce qui mène à la preuve du théorème 3.

1.2.2 Problème de Titchmarsh pour d'autres fonctions multiplicatives

Considérons la somme (1.5) avec $f = \tau$. Nous savons en obtenir un développement asymptotique pour $g = \mathbf{1}_{\mathcal{P}}$, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. Cependant, en 2017, rien ne semblait connu pour des fonctions considérées comme étant de difficulté équivalente ou moindre, comme $g = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$, la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{B}$ des entiers qui sont sommes de deux carrés.

Plus généralemment, on s'attendait à pouvoir traiter le cas de la fonction $g = \tau_z$ pour $z \in \mathbf{C}$, car on considère celle-ci comme étant de la même "difficulté analytique" que la fonction indicatrice des nombres premiers : par exemple, le prolongement holomorphe de sa série génératrice $s \mapsto \zeta(s)^z$ possède des singularités aux zéros de la fonction ζ, qui sont de nature logarithmique.

Nous avons résolu ce cas dans un travail commun avec Berke Topacogullari (Drappeau ; Topacogullari 2019). La "difficulté analytique" à laquelle il a été fait allusion se matérialise, dans notre résultat, par l'intermédiaire d'une hypothèse de périodicité sur le comportement de la fonction g le long de la suite des nombres premiers.

Théorème 4 (Drappeau ; Topacogullari 2019)**.** *Supposons que la fonction multiplicative $g : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ satisfait les hypothèses suivantes :*

— *Il existe $D \in \mathbf{N}$ tel que si p, q sont deux nombres premiers avec $p \equiv q \pmod D$, alors $g(p) = g(q)$.*

— *Il existe $A > 0$ tel que $|g(n)| \leq \tau(n)^A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Alors pour tout $B > 0$, l'on a

$$\sum_{1<n\leq x} g(n)\tau(n-1) = 2 \sum_{\substack{\chi \text{ primitif} \\ \mathrm{cond}(\chi)|D}} \sum_{\substack{q\leq\sqrt{x} \\ \mathrm{cond}(\chi)|q}} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{q^2\leq n\leq x \\ (n,q)=1}} g(n)\chi(n) + O_{D,A,B}(x/(\log x)^B). \tag{1.8}$$

La somme sur n dans le membre de droite est facile à estimer en utilisant des résultats classiques sur les régions sans zéros de fonctions L de Dirichlet. Fouvry et Tenenbaum (Fouvry ; Tenenbaum 2022) ont récemment obtenu un résultat qui contient le théorème (1.8) et fournit des applications nouvelles sur le problème de convolution décalée (1.5) pour certaines fonctions additives f, g.

Par rapport aux arguments qui sous-tendent le problème de Titchmarsh (1.6), le point que nous améliorons est la partie communément appelée "identité combinatoire". C'est un argument qui a beaucoup été étudié dans le cas des nombres premiers (Vinogradov, Linnik, Gallagher, Vaughan, Heath-Brown) ; nous renvoyons à l'article de survol (Ramaré 2013) pour une discussion plus détaillée de l'histoire de ces techniques. L'élément nouveau dans le théorème 4 est une identité combinatoire valable pour une fonction multiplicative g satisfaisant les conditions du théorème 4. Nous obtenons en fait deux identités.

La première est une identité de type Heath-Brown (Heath-Brown 1982) pour τ_α avec $\alpha \in \mathbf{Q}$. La possibilité d'obtenir une telle formule était suggérée par une identité due à Vaughan pour $\tau_{1/2}$ qui nous a été aimablement communiquée par Hugh Montgomery par l'intermédiaire d'Olivier Ramaré. Cette identité pour $\tau_{1/2}$, que nous ne reporterons pas ici, apparaîtra dans le volume II de *Multiplicative Number Theory*, mais nous n'avons pas réussi à en tirer parti pour l'appliquer au problème de Titchmarsh. Après quelques tâtonnements, nous avons trouvé une généralisation convenable de l'identité de Heath-Brown. Pour reprendre le cas particulier simple de la fonction $\tau_{1/2}$, elle prend la forme

$$\sum_{m\geq 4} a_m(\zeta(s)^{1/2}M_x(s)-1)^m\zeta(s)^{1/2} = \zeta(s)^{1/2} + \sum_{\ell\geq 1} b_\ell\zeta(s)^\ell M_x(s)^{2\ell-1}, \tag{1.9}$$

où $(am), (b_\ell)$ sont des nombres complexes, ζ est la fonction de Riemann et

$$M_x(s) = \sum_{n\leq x^{1/4}} \tau_{-1/2}(n)n^{-s}$$

est une approximation de $\zeta(s)^{-1/2}$. La série de Dirichlet formée par le membre de gauche de (1.9) ne comporte aucun terme d'indice $\leq x$, tandis que le membre de droite fait apparaître $\zeta^{1/2}$ d'une part, et des puissances entières de ζ et de la série tronquée M_x d'autre part. Les coefficients a_m et b_ℓ sont obtenus en trouvant d'abord un polynôme de la forme $P(X) = 1 + XQ(X^2)$, $Q \in \mathbf{C}[X]$, qui s'annule en 1 à l'ordre 4, par exemple $P(X) = 1 - \frac{35}{16}X + \frac{35}{16}X^3 - \frac{21}{16}X^5 + \frac{5}{16}X^7$. On substitue ensuite formellement $X = \zeta^{1/2}M$ dans l'égalité $P(X) = 1 + XQ(X^2)$, puis on multiplie par $\zeta^{1/2}$.

Il est moins évident de voir que cette méthode se généralise à la fonction τ_α pour $\alpha = u/v$ rationnel, avec un bon contrôle en termes de v, sur la taille des coefficients b_ℓ. Ce dernier point est crucial. Nous prouvons que c'est effectivement le cas ; la taille de b_ℓ est alors essentiellement contrôlée par la taille (archimédienne) de $|u/v|$. Cela nous a permis, dans un premier temps, d'estimer la somme

$$\sum_{n\leq x} \tau_\alpha(n)\tau(n+1)$$

uniformément en $\alpha \in \mathbf{Q}$, $|\alpha| \ll 1$, $\operatorname{denom}(\alpha) \ll (\log x)^A$, avec un terme d'erreur en $O(x/(\log x)^A)$.

Pour aborder le cas général τ_z, $z \in \mathbf{C}$, $|z| \ll 1$, la seconde idée que nous utilisons est tout simplement une interpolation de Lagrange sur la fonction polynomiale

$$z \mapsto \sum_{n\leq x} \tau_z(n)\tau(n+1).$$

La simplicité de cette approche cache, bien entendu, le problème de maîtriser la dépendance en x dans l'étape d'interpolation. On estime d'abord la contribution des termes de degrés $\geq C \log\log x$ par $O_C(x/(\log x)^{C+O_z(1)})$ pour $C \geq 7$.[1] L'ordre de grandeur $\log\log x$ provient de la valeur typique du nombre de facteurs premiers des entiers inférieurs à x (théorème de Hardy-Ramanujan). Ensuite, un choix naturel de points d'échantillonage rationnels de dénominateurs $O(\log\log x)$, dans l'interpolation de Lagrange, mène à un terme d'erreur de la forme

$$[\text{terme d'erreur aux points d'échantillonage}] \times \exp([\text{degré}]), \tag{1.10}$$

autrement dit ici $\frac{x}{(\log x)^A} \times \exp(C \log\log x)$, avec A arbitrairement grand. Finalement, nous obtenons pour z quelconque une estimation avec terme d'erreur

$$O_{A,C}\Big(\frac{x}{(\log x)^{C+O_z(1)}} + \frac{x}{(\log x)^{A-C}}\Big),$$

et un choix convenable de A et C conclut l'argument. La réussite de cette approche dépend de façon essentielle de la dépendance en le degré dans (1.10).

La seconde preuve que nous avons obtenue présente beaucoup de similarités avec les travaux originels de Vinogradov (Vinogradov 1937). Elle ne repose pas sur une étape d'interpolation, et est donc un peu plus simple dans sa mise en œuvre. Le point de départ reprend l'identité de Linnik (Linnik 1963, Cha-

1. L'exposant n'est pas optimal asymptotiquement mais il nous suffit qu'il tende vers l'infini avec C.

pitre VIII), et consiste à écrire

$$\zeta^z = (1 + (\zeta - 1))^z = \sum_{j\geq 0} \binom{z}{j} (\zeta - 1)^j.$$

Lorsqu'on développe le membre de droite en série de Dirichlet, le coefficient d'un entier n fait intervenir des indices j de taille $O(\log n)$, ce qui est trop élevé en pratique. L'idée est de factoriser la partie y-friable des entiers au niveau des séries de Dirichlet, c'est-à-dire d'écrire

$$\zeta = \zeta_y M_y, \qquad \zeta_y(s) = \prod_{p\leq y}(1-p^{-s})^{-1}, \quad M_y(s) = \prod_{p>y}(1-p^{-s})^{-1}.$$

On choisit alors $y = x^{\varepsilon}$ pour une petite valeur de $\varepsilon > 0$ à déterminer. En appliquant la stratégie de Linnik à la partie qui concerne M_y, on obtient

$$M_y^z = \sum_{j\geq 0} \binom{z}{j} (M_y - 1)^j,$$

et si l'on souhaite détecter le coefficient d'un entier $n \leq x$, la somme sur j peut être tronquée à $j < 1/\varepsilon$. Puis pour conclure nous réintroduisons les divers facteurs ζ_y, ce qui n'a pas d'impact sur nos arguments dès que ε est suffisamment petit. En pratique $\varepsilon < 1/4$ convient. Ceci est du au fait que la fonction indicatrice des entiers friables bénéficie de bonnes propriétés de factorisation au sens de la convolution de Dirichlet. Dans le cas de la fonction diviseurs, nous obtenons par exemple la décomposition

$$\tau_z(n) = \sum_{0\leq \ell\leq 3} c_{\ell,z} \sum_{\substack{n=n_1n_2\\ p|n_1 \implies p\leq x^{1/4}}} \tau_{z-\ell}(n_1)\tau_\ell(n_2), \qquad (n\leq x), \tag{1.11}$$

où

$$\begin{aligned} c_{0,z} &= 1 - \tfrac{11}{6}z + z^2 - \tfrac{1}{6}z^3, & c_{1,z} &= 3z - \tfrac{5}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}z^3, \\ c_{2,z} &= \; - \tfrac{3}{2}z + 2z^2 - \tfrac{1}{2}z^3, & c_{3,z} &= \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{6}z^3. \end{aligned}$$

Partant de la formule (1.11), il est relativement simple de poursuivre les arguments de Bombieri-Fouvry-Friedlander-Iwaniec. On vérifie que $\sum_\ell c_{\ell,z} = 1$ (ce qui est cohérent avec (1.11) en $n=1$) et que $\sum_\ell \ell c_{\ell,z} = z$ (ce qui est cohérent avec (1.11) lorsque $n = p > x^{1/4}$).

L'uniformité par rapport au paramètre z permet d'exploiter la formule de Cauchy pour en déduire des formules asymptotiques pour les entiers ayant exactement k facteurs premiers.

Corollaire 1 (Drappeau ; Topacogullari 2019). *Pour $1 \leq k \ll \log\log x$, l'on a*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n)=k}} \tau(n-1) = \frac{x}{\log x} \sum_{j=1}^{J} \frac{P_{j,k}(\log\log x)}{(\log x)^j} + O_{J,\varepsilon}\Big(x \frac{(\log\log x)^k}{k!(\log)^{J-1+\varepsilon}}\Big),$$

où pour tout $j \geq 1$, $P_{j,k}$ est un polynôme de degré au plus $k-1$.

Pour $k=1$, l'on retrouve le théorème de Bombieri-Fouvry-Friedlander-Iwaniec avec le même terme d'erreur. On note que le nombre des entiers $n \leq x$ tels que $\omega(n) > C \log\log x$ est $\ll_C x(\log x)^{C-1-C\log C}$. La condition sur k dans le corollaire 1 est donc naturelle puisqu'elle correspond à la région dans laquelle le terme d'erreur, qui provient d'une utilisation du théorème de Siegel-Walfisz, est pertinent.

Le cas $z = 1/2$ dans (1.11) nous a permis de répondre à la question qui nous motivait initialement.

Corollaire 2 (Drappeau ; Topacogullari 2019). *Si $\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés, alors pour un certaine suite de nombres $(\beta_j)_{j\geq 0}$ et tout $J \geq 0$, l'on a*

$$\sum_{n \in \mathcal{B} \cap [2,x]} \tau(n-1) = x(\log x)^{1/2} \sum_{j=0}^{J-1} \frac{\beta_j}{(\log x)^j} + O_J(x(\log x)^{1/2-J}).$$

Ces résultats sont encore valables lorsque $n-1$ est remplacé par $n-h$ avec $h \in \mathbf{Z}$, $h \neq 0$ et $|h| \leq x^\delta$ pour un certain $\delta > 0$.

Dans la continuation de ce sujet, on souhaiterait pouvoir estimer la somme au membre de gauche de (1.8) même dans des situations où la valeur moyenne de f est négligeable devant toute puissance négative de $\log x$. Le terme d'erreur donné par le théorème 4 n'est alors plus négligeable devant le terme principal. Un cas particulier important, celui des entiers friables, a pu être traité dans (Fouvry ; Tenenbaum 1990 ; Drappeau 2015), en particulier grâce à un travail de Harper (Harper 2012). Il est naturel de se poser la même question pour l'ensemble des entiers ayant k facteurs premiers lorsque $k/\log\log x \to \infty$, autrement dit, un analogue du corollaire 1 pour ces grandes valeurs de k. La fonction caractéristique de ces entiers bénéficie de bonnes propriétés de factorisation, et il est plausible que certaines des techniques utilisées dans (Drappeau 2015) puissent être adaptées pour traiter ce cas. Le problème de remplacer la fonction τ dans le membre de gauche de (1.8) par une fonction plus générale semble, en revanche, actuellement hors de portée. Le cas le plus simple après la fonction τ est celui de la fonction diviseurs τ_3 ; l'estimation asymptotique de $\sum_{n\leq x} \tau_3(n)\tau_3(n+1)$ est une question ouverte majeure en théorie analytique des nombres, sur laquelle essentiellement aucune approche n'est effective pour le moment.

1.3 Zéros de fonctions L de Dirichlet

Dans cette section on suppose que l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet est vraie.

Le problème dont il est question ici concerne la répartition verticale des zéros de fonctions L de Dirichlet. Étant donné un caractère de Dirichlet primitif χ, on s'intéresse au multi-ensemble des zéros de sa fonction L dans la bande critique,

$$Z_\chi := \{\gamma \in \mathbf{R}, L(\tfrac{1}{2} + i\gamma, \chi) = 0, \},$$

puis aux multi-ensembles

$$Z_q := \bigcup_{\substack{\chi \pmod q \\ \text{primitif}}} Z_\chi,$$
$$Z_{\leq Q} := \bigcup_{q \leq Q} Z_q.$$

Par des méthodes dues notamment à Riemann et Weyl, il est connu que l'on a

$$\operatorname{card}\{\gamma \in Z_\chi \cap [0, T]\} \sim \frac{T}{2\pi} \log\Big(\frac{q}{2\pi}\Big), \qquad (T \to \infty, T \leq q^{o(1)}).$$

Au vu de cette estimation, il est donc naturel de s'attendre à trouver, à distance $\asymp 1$ de l'axe réel, un nombre de l'ordre de $\log q$ éléments de Z_χ. Peu de choses sont connues pour un caractère χ donné, lorsque $q \to \infty$. En revanche, on dispose de conjectures précises lorsque l'on fait varier χ parmi tous les caractères de Dirichlet de module q, autrement dit, lorsqu'on étudie l'ensemble Z_q.

Étant donnée une fonction $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ et un entier $q \geq 1$, on s'intéresse à la quantité

$$W(\phi, q) := \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \text{primitif}}} \sum_{\gamma \in Z_\chi} \phi\Big(\frac{\gamma}{2\pi} \log q\Big).$$

Notons $\psi(q)$ le nombre de caractères primitifs modulo q.

Conjecture 1. *Supposons que la transformée de Fourier $\hat{\phi}$ est à support compact. Alors l'on a*

$$W(\phi, q) \sim \psi(q) \int \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{1.12}$$

dès que le membre de droite tend vers l'infini.

Cette conjecture est un cas particulier d'une conjecture plus vaste énoncée par Katz-Sarnak (Katz ; Sarnak 1999), qui fait un lien conjecturel avec la répartition des valeurs propres de matrices aléatoires. Ces conjectures trouvent leur source dans un article de Montgomery (Montgomery 1973) sur la corrélation de paires de zéros de la fonction ζ de Riemann.

La conjecture 1 peut être établie sous des conditions relatives à la taille du support de la transformée de Fourier de ϕ. Le résultat suivant, qui est établi par exemple dans (Sica 1998), découle relativement rapidement de l'hypothèse de Riemann généralisée.

Théorème 5. *Sous l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet, l'équivalence* (1.12) *est vraie lorsque* $\hat{\phi}$ *est à support dans* $]-2, 2[$.

Dans un travail avec Kyle Pratt et Maksym Radziwiłł (Drappeau ; Pratt ; Radziwiłł 2022), nous étendons la condition sur le support de $\hat{\phi}$, au prix d'effectuer une moyenne supplémentaire sur le module q.

Théorème 6 (Drappeau ; Pratt ; Radziwiłł 2022)**.** *Sous l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet, l'on a*

$$\sum_{q \leq Q} W(\phi, q) \sim \Big(\sum_{q \leq Q} \psi(q) \Big) \int \phi(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

lorsque $\hat{\phi}$ *est à support dans* $]-2-\delta, 2+\delta[$ *avec* $\delta = 50/1093$.

L'hypothèse de Riemann peut être retirée dans cet énoncé, sous réserve de remplacer γ par $-i(\rho - 1/2)$ dans la définition de $W(\phi, q)$.

Le principal intérêt du théorème 6 est que l'on dépasse le seuil 2 sur la taille du support de $\hat{\phi}$, ce qui ne pouvait être déduit directement d'une application de l'hypothèse de Riemann comme au théorème 5. La situation est analogue à celle de compter des nombres premiers en progressions arithmétiques de modules q, où une utilisation triviale de l'hypothèse de Riemann généralisée mène à une condition $q \leq x^{1/2-\varepsilon}$, que l'on peut dépasser inconditionnellement dans certains cas (Fouvry 1985 ; Bombieri ; Friedlander ; Iwaniec 1986) à condition d'effectuer une moyenne supplémentaire sur q. Cette analogie est plus que formelle, puisque les mêmes outils sont au cœur de la preuve dans les deux cas.

La méthode commence par une application de la formule explicite de Riemann-Weyl, qui prend essentiellement la forme

$$\sum_{q \leq Q} W(\phi, q) \approx \Big(\sum_{q \leq Q} \psi(q) \Big) \int \phi(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \text{primitif}}} \sum_{p} \chi(p) \hat{\phi}\Big(\frac{\log p}{\log q} \Big).$$

Par l'orthogonalité des caractères de Dirichlet, la dernière somme peut être bien évaluée à condition de savoir estimer la somme

$$\sum_{q \leq Q} \psi(q) \sum_{p \equiv 1 \pmod q} \hat{\phi}\Big(\frac{\log p}{\log q} \Big).$$

Nous sommes donc réduit à compter des nombres premiers en progressions arithmétiques. Le problème revient fondamentalement au suivant : prouver qu'il existe des réels $\kappa > 2$ et $\eta > 0$, tels que l'on ait

$$\sum_{q \leq Q} \Big(\sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv 1 \pmod q}} 1 - \frac{\mathrm{li}(X)}{\varphi(q)} \Big) \ll Q^{1-\eta}\sqrt{X}, \qquad \text{lorsque } X = Q^{\kappa}. \tag{1.13}$$

Cette question peut sembler paradoxale. En effet, dans les estimations de type Bombieri-Vinogradov, le domaine $X > Q^{2+\varepsilon}$ est le plus facile d'accès, et tout le problème est de diminuer la valeur de X, tandis qu'ici l'on souhaite prendre X légèrement plus grand que Q^2. Le principal enjeu réside en réalité dans le terme d'erreur, que nous souhaitons rendre négligeable par rapport à $Q\sqrt{X}$, tandis que dans l'étude des nombres premiers en progressions arithmétiques, la borne triviale est plutôt de l'ordre de X. Ainsi, lorsque X est légèrement plus grand que Q^2, le terme d'erreur que nous souhaitons atteindre est de l'ordre de $X^{1-\eta}$, tandis que le théorème de Bombieri-Vinogradov fournit un majorant de l'ordre de $X/(\log X)^A$.

La "preuve de concept" du théorème 6 est fournie par l'estimation du théorème 3. Ce théorème prouve que si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors l'on a

$$\sum_{q \leq Q} \Big(\sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv 1 \pmod q}} 1 - \frac{\mathrm{li}(X)}{\phi(q)} \Big) \ll X^{1-\eta} \qquad (X = Q^2)$$

pour un certain $\eta > 0$, ce qui constitue une majoration de type (1.13) pour $\kappa = 2$. Tout le travail consiste à montrer que l'on peut augmenter légèrement la valeur de κ tout en gardant un terme d'erreur de la même qualité.

Le fait que nous pouvons nous passer de l'hypothèse de Riemann généralisée dans le théorème 6 est lié au fait que les caractères χ qui interviennent dans la définition de $W(\phi, q)$ sont tous primitifs. Nous pouvons alors retirer, dans l'ensemble des arguments, la contribution des caractères de conducteurs au plus x^{δ} pour $\delta > 0$ suffisamment petit, qui constituent la seule obstruction à obtenir un gain en puissance de X en l'absence d'une hypothèse de Riemann.

1.4 Valeurs friables de polynômes quadratiques

Une autre application emblématique des estimations de Deshouillers et Iwaniec (Deshouillers ; Iwaniec 1982a) concerne le niveau de répartition des polynômes quadratiques. Cela tient à ce que les racines d'un polynôme quadratique donnent naturellement lieu à une somme d'exponentielle du même type que les sommes de Kloosterman.

Le problème est celui d'estimer la somme

$$\Delta(x,Q,\lambda) = \sum_{q\leq Q} \lambda_q \Big(\sum_{\substack{n\leq x \\ n^2\equiv -1 \pmod q}} 1 - \mathrm{TP}(x,q) \Big),$$

où (λ_q) est une suite de nombres complexes de modules au plus 1, et $\mathrm{TP}(x,q)$ est le terme principal attendu, c'est-à-dire

$$\mathrm{TP}(x,q) := \frac{x\rho(q)}{q}, \qquad \rho(q) = \mathrm{card}\{m \pmod q), m^2 \equiv -1 \pmod q)\}.$$

Il est permis de conjecturer que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\Delta(x,Q,\lambda) = O(x^{1-\delta}), \qquad (Q \leq x^{2-\varepsilon}),$$

uniformément en λ. En pratique, l'on a $\sum_{q\leq Q} \mathrm{TP}(x,q) \ll x\log(2Q)$, et toute majoration de $\Delta(x,q,\lambda)$ négligeable devant $x\log Q$ est intéressante. Ce problème est de plus en plus difficile à mesure que la valeur de Q est de plus en plus grande.

Le résultat suivant a été obtenu dans travail en commun avec Régis de la Bretèche (La Bretèche ; Drappeau 2020).

Théorème 7 (La Bretèche ; Drappeau 2020). *Supposons que la suite (λ_q) soit bien factorisable au sens d'Iwaniec. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|\Delta(x,Q,\lambda)| \ll x^{1-\delta} \qquad \textit{pour} \quad Q \leq x^{1+25/178-\varepsilon}.$$

Ceci améliore quantitativement un résultat obtenu par Iwaniec en 1978 (Iwaniec 1978), c'est-à-dire avant la “kloostermanie”. Une telle majoration a des conséquences sur les problèmes qui concernent la factorisation du polynôme n^2+1 ; par exemple, Iwaniec utilise son estimation de $|\Delta(x,Q,\lambda)|$ pour démontrer, à l'issue d'un travail conséquent, que le polynôme n^2+1 prend infiniment souvent des valeurs ayant au plus deux facteurs premiers. C'est une approximation de la conjecture de Landau que n^2+1 est premier pour une infinité de valeurs de n.

Nous avons appliqué le théorème 7 à un autre problème, issu de travaux de Tchébychev. La question est de trouver des valeurs de n telles que n^2+1 a un grand facteur premier. Le meilleur résultat avant 2017 était dû à Deshouillers et Iwaniec (Deshouillers ; Iwaniec 1982b), qui établissent la minoration

$$P^+\Big(\prod_{x\leq n<2x} (n^2+1)\Big) \gg x^{1.2024},$$

où $P^+(m)$ désigne le plus grand facteur premier de m, avec la convention $P^+(1) = 1$. Dans le cadre des travaux qui nous ont mené au théorème 7, nous avons été en mesure de mettre à jour ce qui est connu sur ce sujet, à la lumière des progrès réalisés sur la conjecture de Selberg sur les petites valeurs propres du laplacien hyperbolique sur les surfaces de congruence. La dépendance explicite en θ dans l'estimation (1.2), en particulier, nous a permis de déduire le résultat suivant.

Théorème 8 (La Bretèche ; Drappeau 2020). *Nous avons*

$$P^+\Big(\prod_{x \leq n < 2x} (n^2+1)\Big) \gg x^{1.2182}.$$

Ce résultat a été ultérieurement amélioré de façon significative par Merikoski (Merikoski 2022) : l'on sait maintenant que

$$P^+\Big(\prod_{x \leq n < 2x} (n^2+1)\Big) \gg x^{1.279}.$$

Une des nouveautés du travail de Merikoski est l'utilisation d'un crible minorant du à Harman dans l'argument de Deshouillers-Iwaniec, qui a eu pour effet d'amplifier considérablement l'efficacité des majorations de sommes d'exponentielles sur ce problème.

Une seconde partie du travail avec Régis de la Bretèche (La Bretèche ; Drappeau 2020), qui en constituait en fait la principale motivation, consiste en la construction d'un crible majorant pour l'ensemble des entiers friables. Un entier n est dit y-friable si $P^+(n) \leq y$. C'est un ensemble d'entiers qui intervient de façon récurrente en théorie multiplicative des nombres (Granville 2008 ; Hildebrand ; Tenenbaum 1993 ; Moree 2014), et sur lequel mes travaux de thèse étaient centrés. On note

$$\begin{aligned} S(x,y) &:= \{n \leq x, p \mid n \implies p \leq y\}, \\ \Psi(x,y) &:= \operatorname{card} S(x,y). \end{aligned}$$

Pour chaque réel $u \geq 1$, il est connu que

$$\Psi(x, x^{1/u}) \sim x\rho(u) \qquad (x \to \infty),$$

où $\rho : \mathbf{R}_{\geq 1} \to [0,1]$ est la fonction de Dickman. Lorsque $u \to \infty$, l'on a asymptotiquement $\rho(u) = u^{-(1+o(1))u}$. De façon analogue aux nombres premiers, nous aimerions être en mesure de savoir compter asymptotiquement le cardinal des entiers $n \leq x$ tel que n^2+1 soit y-friable. Ceci peut être vu comme une instance du problème (1.5) lorsque f est la fonction caractéristique des entiers y-friables, et g est la fonction caractéristique des entiers carrés ; ou bien encore comme une version "duale" de la conjecture de Landau. L'on conjecture que

$$C(x, x^{1/u}) := \operatorname{card}\{n \leq x : n^2+1 \text{ est } x^{1/u}\text{-friable}\} \sim x\rho(2u),$$

sur la base du fait que l'entier n^2+1 est typiquement d'ordre de grandeur x^2, et de l'heuristique que cet entier, qui n'a pas de diviseur fixé, prend des valeurs friables à une fréquence similaire à celle des entiers de même taille.

Le problème de majorer asymptotiquement la quantité $C(x, x^{1/u})$ est plus simple. La meilleure estimation connue, due à Khmyrova (Hmyrova 1964), fournit

$$C(x, x^{1/u}) \ll x\rho(u)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $u \ll \log x / \log\log x$, en se basant sur estimation élémentaire de $\Delta(x, Q, \lambda)$ pour $Q \leq x^{1-\varepsilon}$. Dans l'article (La Bretèche ; Drappeau 2020), nous construisons un crible majorant pour les entiers friables, qui fournit, en association avec le théorème 7, l'estimation suivante.

Théorème 9 (La Bretèche ; Drappeau 2020). *Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $c > 0$ telle que pour $1 \leq u \leq c \log x / \log\log x$, l'on ait*

$$C(x, x^{1/u}) \ll_\varepsilon x\rho((1 + \tfrac{25}{178} - \varepsilon)u).$$

Lorsque $u \asymp \log x / \log\log x$, nous gagnons donc asymptotiquement une puissance de x par rapport aux estimations précédentes.

Le théorème 7 apporte deux améliorations par rapport à la littérature existante. La première concerne la valeur numérique de l'exposant. Le précédent travail sur ce sujet était du à Iwaniec, qui a obtenu une estimation analogue avec exposant $1/15$, en utilisant la majoration de Weil des sommes de Kloosterman. L'utilisation des travaux récents sur les sommes de Kloosterman en moyenne, et notamment le théorème 1, est la raison principale au gain numérique. La seconde amélioration apportée par le théorème 7 est plus substantielle mais aussi plus technique : nous n'avons nullement besoin que la suite (λ_q) soit à support sur des nombres premiers ou sans facteur carré. Cette flexibilité découle d'une amélioration d'un argument de Duke-Friedlander-Iwaniec (Duke ; Friedlander ; Iwaniec 1995), et utilise de façon cruciale l'uniformité en q permise dans la majoration du théorème 1.

2 Modularité, fractions continues et lois limites

Dans cette seconde partie, les résultats présentés concernent des objets d'origine arithmétique qui sont étudiés par des méthodes relevant plutôt de systèmes dynamiques.

On décrit d'abord le problème qui a initié les travaux présentés dans cette partie. Il concerne la série

$$D(s,x) := \sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s} \mathrm{e}(nx),$$

où l'on rappelle que $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n, et $\mathrm{e}(z) := \mathrm{e}^{2\pi i z}$. Cette série est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et $x \in \mathbf{R}$ quelconque. Lorsque $x \in \mathbf{Q}$, Estermann (Estermann 1930) a prouvé que la fonction $D(\cdot, x)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, et une équation fonctionnelle qui relie la valeur $D(s, a/q)$ avec $D(1-s, -d/q)$ lorsque $ad \equiv 1 \pmod q$. Cela peut se voir, par exemple, en exprimant la fonction périodique $n \mapsto \mathrm{e}(nx)$ en termes de caractères de Dirichlet.

La valeur $D(1/2, a/q)$ est ainsi intimement liée aux valeurs centrales $L(\frac12, \chi)$ des fonctions L de Dirichlet. Bettin prouve dans (Bettin 2016) que lorsque q est un nombre premier et $(a,q) = 1$, le second moment tordu

$$M_2(q,a) := \frac{1}{q^{1/2}} \sum_{\chi \pmod q} \chi(a) |L(\tfrac12, \chi)|^2$$

est proche de la valeur en $x = a/q$ de la fonction d'Estermann au point central,

$$M_2(q,a) \simeq \mathrm{Re}\, D(\tfrac12, a/q) + \mathrm{Im}\, D(\tfrac12, a/q). \tag{2.1}$$

Ainsi que le remarque Bettin (Bettin 2016), l'estimation de $M_2(q,a)$ est lié à celle du quatrième moment des fonctions L de Dirichlet,

$$M_4(q) := \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} |L(\tfrac12, \chi)|^4,$$

dont l'estimation avec terme d'erreur en puissance de q par Young (Young 2011), successivement améliorée dans (Blomer ; Fouvry ; Kowalski et al. 2017 ; Wu 2020), a été un succès remarquable des méthodes décrites dans la première partie (sommes d'exponentielles algébriques, formule de Kuznetsov). En effet, l'on a par orthogonalité des caractères

$$M_4(q) = \sum_{a \pmod q} |M_2(q,a)|^2.$$

Au vu de (2.1), ceci motive donc naturellement la question de comprendre la taille des valeurs prises par $D(\frac{1}{2}, x)$ lorsque x varie dans un ensemble de nombres rationnels.

2.1 Répartition statistique des valeurs centrales de fonctions L

2.1.1 Équirépartition d'orbites rationnelles pour l'application de Gauss

Améliorant des résultats antérieurs de Young (Kıral; Young 2019) et Conrey (Conrey [s. d.]), Bettin (Bettin 2016) démontre que la fonction

$$\phi(x) := D(\tfrac{1}{2}, x) - D(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{x}), \tag{2.2}$$

initialement définie pour $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, se prolonge en une fonction hölderienne sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. En conjonction avec la 1-périodicité, ceci implique plus généralement que pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, la fonction

$$\phi_\gamma(x) : x \mapsto D(\tfrac{1}{2}, x) - D(\tfrac{1}{2}, \gamma x)$$

se prolonge en une fonction hölderienne sur $\mathbf{R} \setminus \{\gamma^{-1}\infty\}$. Ceci fait de $D(\frac{1}{2}, \cdot)$ ce que Zagier, dans un article séminal (Zagier 2010), appelle une forme modulaire "quantique" pour $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$.

L'égalité (2.2) ouvre la voie à une offre une expression de $D(\frac{1}{2}, x)$ en termes de l'orbite finie du rationel x sous l'application de Gauss

$$T :]0,1[\to [0,1[, \qquad T(x) = \{1/x\},$$

où $\{\cdot\}$ désigne la fonction « partie fractionnaire », c'est-à-dire à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$D(\tfrac{1}{2}, x) = D(\tfrac{1}{2}, 0) + \sum_{j=1}^{r(x)} \phi((-1)^{j-1} T^{j-1}(x)), \tag{2.3}$$

où $r(x) \geq 0$ est le plus petit entier tel que $T^{r(x)}(x) = 0$. Cette égalité ramène entièrement le problème à celui de la répartition en moyenne des orbites de nombres rationnels sous l'application de Gauss. Toute l'arithmétique du problème est encodée dans les propriétés analytiques de la fonction ϕ, qui est couramment appelée « l'observable » dans la théorie des systèmes dynamiques.

Notons l'ensemble des rationnels dans $[0,1[$ de dénominateur q fixé par

$$\Omega_q := \{a/q,\ 0 \le a < q, (a,q) = 1\}.$$

La question à laquelle nous aimerions répondre est la suivante : lorsque x est un nombre rationnel pris uniformément au hasard dans Ω_q, que peut-on dire de la variable aléatoire $D(\frac{1}{2}, x)$ lorsque $q \to \infty$?

Les méthodes dont nous disposons ne permettent pas d'obtenir des résultats précis sur Ω_q [1]. Le problème devient abordable dès lors que l'on effectue une moyenne supplémentaire sur q, c'est-à-dire si l'on travaille sur l'ensemble plus grand

$$\Omega_{\le Q} := \bigcup_{q \le Q} \Omega_q$$

des nombres rationnels de dénominateurs au plus Q. La répartition des sommes de Birkhoff de la forme (2.3), le long des orbites de nombres rationnels de $\Omega_{\le Q}$ est un sujet qui est entré récemment dans le giron des méthodes de la théorie des systèmes dynamiques mesurés, par les travaux de Vallée (Vallée 2000) et Baladi et Vallée (Baladi ; Vallée 2005).

Munissant $\Omega_{\le Q}$ de la mesure de comptage uniforme, on note $\mathbb{P}_Q$ et $\mathbb{E}_Q$ la probabilité et la variance associée. Un des théorèmes principaux de Baladi et Vallée dans (Baladi ; Vallée 2005) est le suivant.

Théorème 10. *Soit $(c(n))_{n\ge 1}$ une suite de nombres réels vérifiant $c(n) = O(\log n)$ pour $n \ge 2$. Pour tout $x \in \mathbf{Q} \cap (0,1)$, l'on pose*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} c(a_j(x)),$$

où $a_j(x) = \lfloor 1/T^{j-1}(x) \rfloor$ désigne le j-ième coefficient dans le développement en fraction continue

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots}}}.$$

Il existe $\delta > 0$ et deux fonctions U, V définies et holomorphes sur un voisinage $W \subset \mathbf{C}$ de l'origine, telles que lorsque $Q \to \infty$, l'on ait

$$\mathbb{E}_Q\Big(\exp\big(wf(x)\big)\Big) = \exp\big(U(w)\log Q + V(w) + O(Q^{-\delta})\big) \qquad (w \in W). \tag{2.4}$$

1. On refère néanmoins à (Aistleitner ; Borda ; Hauke 2022) pour quelques résultats généraux récents.

La qualité du terme d'erreur au membre de droite de (2.4) repose notamment sur l'adaptation d'une méthode de Dolgopyat (Dolgopyat 1998) permettant d'obtenir un trou spectral uniforme pour la famille d'opérateurs de transfert associée à T,

$$\mathbb{H}_\tau : f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^{2+i\tau}} f\Big(\frac{1}{n+x}\Big) \qquad (\tau \in \mathbf{R}).$$

Ainsi qu'il est expliqué dans la section 1.1 de (Baladi; Vallée 2005), des analogues du théorème 10 sont connus et classiques dans la situation où $x \in [0,1]$ est pris uniformément au hasard selon la mesure de Lebesgue, et lorsque que la fonction étudiée est $f_N(x) = \sum_{j=1}^N c(a_j(x))$ avec $N \to \infty$. Le paramètre N joue formellement le rôle de $\log Q$, à une constante près, qui est la longueur typique du développement en fraction continue d'une fraction dans $\Omega_{\leq Q}$. L'analogue continu du problème est plus simple à de nombreux égards : par exemple, l'analogue continue de l'estimation (2.4) s'obtient à l'aide d'informations sur les perturbations de l'opérateur $\mathbb{H}_\tau$ pour $\tau = 0$ uniquement, ce qui relève de méthodes classiques de la théorie des perturbations des opérateurs, sans qu'il y ait lieu de faire appel aux techniques de Dolgopyat.

Dans le théorème 10, la fonction $f(x)$ peut être interprétée comme une somme de Birkhoff de même nature que (2.3), où l'observable est $\phi(x) := c(\lfloor 1/x \rfloor)$. Pour la question qui nous intéresse, celle de la fonction $D(\frac{1}{2}, \cdot)$, les deux principales différences par rapport à l'énoncé du théorème 10 sont les suivantes [2] :

1. notre observable ϕ est hölderienne, et n'est pas constante par morceaux sur les intervalles $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$,
2. notre observable ϕ n'a pas de moment exponentiel, et plus précisément, l'on a $\phi(x) \sim cx^{-1/2}\log(1/x)$ lorsque $x \to 0$.

Dans (Bettin; Drappeau 2022b), nous obtenons une généralisation du résultat de (Baladi; Vallée 2005) qui résout ces deux points. Étant donnée une application $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$, l'on note

$$S_\phi(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} \phi(T^{j-1}(x)), \qquad (x \in \mathbf{Q} \cap (0,1)).$$

Dans le cas du théorème 10, nous avons donc $f(x) = S_\phi(x)$ pour $\phi(x) = c(\lfloor 1/x \rfloor)$. Dans le cas de la fonction d'Estermann, nous avons $D(\frac{1}{2}, x) = D(\frac{1}{2}, 0) + S_\phi(x)$ où ϕ est une certaine fonction höldérienne.

L'expression de notre résultat fait intervenir l'intégrale

$$I_\phi(t) := \int_0^1 (\mathrm{e}^{it\phi(x)} - 1) \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\log 2} \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{2.5}$$

2. Nous négligeons dans la suite l'effet du changement de signe $(-1)^{j-1}$ dans (2.3).

Théorème 11 (Bettin ; Drappeau 2022b)**.** *Soient $\kappa_0, \lambda_0, \alpha_0 > 0$. Supposons que la fonction $\phi : (0,1) \to \mathbf{R}$ vérifie les propriétés suivantes :*

— *Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, la fonction $\phi|_{]1/(n+1),1/n[}$ se prolonge en une fonction κ_0-hölderienne.*

— *L'on a*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\Bigg(\sup_{x\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} |\phi(x)|^{\alpha_0} + \sup_{x,y\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^{\lambda_0}}{|x-y|^{\lambda_0\kappa_0}}\Bigg) < \infty. \tag{2.6}$$

Alors il existe $t_0, \delta > 0$ et deux fonctions $U, V : [-t_0, t_0] \to \mathbf{C}$ telles que

$$\mathbb{E}_Q\Big(\exp\big(itS_\phi(x)\big)\Big) = \exp\Big(U(t)\log Q + V(t) + O(Q^{-\delta})\Big), \qquad (t \in [-t_0, t_0]), \tag{2.7}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{12\log 2}{\pi^2} I_\phi(t) + O_\varepsilon(t^2 + |t|^{2\alpha_0-\varepsilon}), \\ V(t) &= O_\varepsilon(|t| + |t|^{\alpha_0-\varepsilon}). \end{aligned}$$

Si, de plus, l'on a $\alpha_0 > 1$, alors il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que

$$U(t) = \frac{12\log 2}{\pi^2} I_\phi(t) + Ct^2 + O_\varepsilon(t^3 + |t|^{1+\alpha_0-\varepsilon}).$$

La conclusion du théorème 11 correspond au cas $t = iw$ du théorème 10 de Baladi-Vallée. Une estimation pour t complexe au voisigane de l'origine est valable, avec une preuve identique, à condition que ϕ admette des moments exponentiels, au sens où

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sup_{x\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} \exp\big(\sigma_0|\phi(x)|\big) < \infty$$

pour un certain $\sigma_0 > 0$. Ceci est équivalent à demander que $\phi(x) = O(|\log(2/x)|)$, de façon similaire à l'hypothèse de croissance dans le théorème 10. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le cas de la fonction d'Estermann.

La preuve que nous proposons avec Bettin du théorème 11 repose sur une adaptation des arguments de Baladi et Vallée (Baladi ; Vallée 2005), et notamment de la partie qui utilise les travaux de Dolgopyat (Dolgopyat 1998). Pour résoudre l'objection 1., nous travaillons dans un espace de fonctions hölderiennes, ce qui relève de méthodes d'analyse standard. Cette modification s'est avérée très utile pour permettre des valeurs arbitraires de $\lambda_0 > 0$ dans la condition (2.6). Pour résoudre l'objection 2., nous utilisons des résultats récents de Kloeckner (Kloeckner 2019) sur le spectre d'opérateurs sujets à une perturbation, qui sont valables sans condition d'analyticité de ladite perturbation. Le prix à payer pour obtenir notre énoncé général est de faire intervenir l'intégrale $I_\phi(t)$ sans l'évaluer *a priori*.

Dans un article compagnon (Bettin ; Drappeau 2022a), nous fournissons des énoncés généraux permettant d'évaluer l'intégrale $I_\phi(t)$ dans la plupart des cas pratiques. Dans les cas les plus favorables, ϕ est de carré intégrable, et nous pouvons estimer l'intégrale (2.5) en insérant un développement de Taylor à l'ordre 2. L'on obtient alors le corollaire suivant.

Corollaire 3 (Bettin ; Drappeau 2022b). *L'on reprend les hypothèses et notations du théorème 11. Supposons de plus que $\alpha_0 \geq 2$, et qu'il n'existe pas de constante $c \in \mathbf{R}$ et de fonction f sur $[0,1]$ telles que $\phi = c + f - f \circ T$. Alors il existe $\mu \in \mathbf{R}$ et $\sigma > 0$ telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$, lorsque $Q \to \infty$, l'on ait*

$$\mathbb{P}_Q\Big(\frac{S_\phi(x) - \mu \log Q}{\sigma\sqrt{\log Q}} \leq t\Big) = \int_{-\infty}^t \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v}{\sqrt{2\pi}} + o(1).$$

L'expression de μ est

$$\mu = \frac{12}{\pi^2}\int_0^1 \phi(x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

La quantité σ, quant à elle, ne semble pas admettre en général d'expression explicite en termes de ϕ.

Nous illustrons enfin le théorème 11 par un théorème limite sur la somme des coefficients $a_j(x)$ dans le développement en fraction continue,

$$\Sigma(x) := \sum_{j=1}^{r(x)} a_j(x).$$

L'on a manifestement $\Sigma(x) = S_\phi(x)$ pour le choix $\phi(x) = \lfloor 1/x \rfloor$. Cette fonction ϕ n'est pas intégrable au voisinage de 0. Pour énoncer la loi limite, l'on définit G_1 comme étant la fonction de répartition de la loi stable $S_1(\frac{6}{\pi}, 1, 0)$, c'est-à-dire

$$G_1(v) := \int_{-\infty}^v g_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad g_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{6}{\pi}|t| - \frac{12}{\pi^2}it\log|t|}\,\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

Nous notons aussi γ_0 la constante d'Euler-Mascheroni.

Corollaire 4 (Bettin ; Drappeau 2022b). *Pour chaque $v \in \mathbf{R}$, nous avons*

$$\mathbb{P}_Q\Big(\frac{\Sigma(x)}{\log Q} - \frac{\log\log Q - \gamma_0}{\pi^2/12} \leq v\Big) \to G_1(v)$$

lorsque $Q \to \infty$.

La loi G_1 n'admet pas de moment d'ordre 1, ce qui correspond au fait que $\phi(x) = \lfloor 1/x \rfloor$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

L'analogue continu du corollaire 4, c'est-à-dire lorsque x est pris au hasard dans $[0,1]$ (la somme $\Sigma(x)$ étant tronquée à $j \leq N$ pour un paramètre $N \in \mathbf{N}$ qui tend vers l'infini), avait été établi par Heinrich (Heinrich 1987) en 1987.

2.1.2 Application à la fonction d'Estermann

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 11 à la fonction $D(\frac{1}{2},\cdot)$. Pour simplifier l'exposition, l'on considère sa partie réelle, qui a l'avantage d'être paire, et l'on pose $\psi = \operatorname{Re}\phi$ où ϕ est définie par (2.2). Ainsi que l'a montré Bettin (Bettin 2016), la fonction ψ prend essentiellement la forme

$$\psi(x) = x^{-1/2}(c_1 \log x + c_2) + E(x),$$

où E est hölderienne sur $\mathbf{R}$ d'exposant α pour tout $\alpha < 1/2$, et c_1, c_2 sont deux constantes. Dans (Bettin ; Drappeau 2022a), l'intégrale $I_\psi(t)$ est estimée par

$$I_\psi(t) = 1 + i\mu t - \sigma^2 t^2 |\log t|^3 + o(t^2|\log t|^3)$$

lorsque $t \to 0^+$, où $\mu \in \mathbf{R}$ est une constante et $\sigma = 1/\pi$. En évaluant l'espérance de $D(1/2, x)$ sur $\Omega_{\leq Q}$, on montre que $\mu = 0$. On en déduit alors le résultat suivant, qui répond à notre question initiale.

Corollaire 5 (Bettin ; Drappeau 2022b)**.** *Pour $\sigma = 1/\pi$, l'on a*

$$\mathbb{P}_Q\Big(\frac{\operatorname{Re} D(x)}{\sigma\sqrt{(\log Q)(\log\log Q)^3}} \leq t\Big) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v}{\sqrt{2\pi}} + o(1)$$

lorsque $Q \to \infty$.

L'apparition du facteur supplémentaire $(\log\log Q)^3$, que nous n'avions pas anticipé, est intimement lié au fait que la fonction ψ n'est pas de carré intégrable. Cela découle *in fine* de la présence d'un pôle double en $s = 1$ pour la série de Dirichlet $\zeta(s)^2$, dont $D(s, x)$ est la tordue additive.

La simplicité avec laquelle le corollaire 5 est déduit du théorème 11 occulte nos nombreuses tentatives d'obtenir le corollaire 5 par d'autres méthodes, qui ont toutes échoué. À titre d'exemple, la stratégie la plus naturelle était de passer par l'estimation des moments, afin de tirer parti de l'orthogonalité des caractères additifs. Ce calcul fut réalisé par Bettin dans (Bettin 2019) avec la conclusion que l'estimation n'est plus pertinente à partir du deuxième moment, du fait de la contribution prépondérante d'un ensemble asymptotiquement négligeable de nombres rationnels. Mener à bien cette stratégie aurait nécessité une compréhension plus fine des nombres rationnels en cause et une façon analytiquement viable de retirer leur contribution aux moments. *A contrario*, les méthodes dynamiques qui sous-tendent le théorème 11 analysent cet obstacle de façon naturelle et transparente.

En ce qui concerne le lien avec les moments des fonctions L de Dirichlet, dont nous avons parlé au début de cette partie, il est décevant que la relation exacte (2.1), entre le second moment tordu des fonctions L de Dirichlet et la fonction d'Estermann, n'ait lieu que lorsque q est premier ; lorsque q n'est pas premier, cette relation est perturbée par une convolution multiplicative supplémentaire. Cela ne nous permet pas de transférer directement les résultats ci-dessus, qui sont valables en moyenne sur q entier sans contrainte. Nous pouvons néanmoins émettre une conjecture plausible sur la répartition des valeurs des moments tordus $M_2(q, a)$.

Conjecture 2. *La répartition du multi-ensemble*

$$\left\{ \frac{M_2(a,q)}{(\log q)^{1/2}(\log\log q)^{3/2}},\ 0 < a < q, (a,q) = 1 \right\}$$

suit asymptotiquement, lorsque $q \to \infty$, une loi gaussienne centrée.

2.1.3 Application aux tordues additives de valeurs centrales de formes modulaires

Le théorème 11 a trouvé une application à un autre type de fonctions sur $\mathbf{Q}$, qui sont construites à l'aide de formes modulaires. Soit f une forme modulaire holomorphe cuspidale de poids k et de niveau N, ce que l'on notera $f \in S(k, N)$. Notant

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{(k-1)/2}\, \mathrm{e}(nz), \qquad (\mathrm{Im}(z) > 0)$$

le développement de Fourier de f à l'infini, on définit la fonction L

$$L(f,s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s},$$

initialement sur $\mathrm{Re}(s) > 1$. Il est connu depuis Hecke que cette fonction se prolonge en une fonction entière de s, qui satisfait une équation fonctionnelle de la forme

$$L(f,s) = \gamma_f(s) L(\bar{f}, 1-s)$$

où γ_f est essentiellement un quotient de fonctions Γ d'Euler. Lorsque f est une forme de Hecke, la fonction $n \mapsto a_n$ est multiplicative, et $L(f,s)$ possède alors un produit eulérien. La méthode de Hecke consiste à exprimer $L(f,s)$ comme une intégrale, ou période, de la forme f :

$$L(f,s) = \frac{(2\pi)^s}{i\Gamma(s)} \int_0^{i\infty} f(z) (\mathrm{Im}\, z)^{s + \frac{k-1}{2} - 1}\, \mathrm{d}z, \qquad (s \in \mathbf{C}), \tag{2.9}$$

où le chemin d'intégration est une droite verticale.

De façon analogue avec la construction de la fonction d'Estermann, l'on peut former la tordue additive :

$$L(f,s,x) := \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s} \operatorname{e}(nx)$$

qui converge pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ et $x \in \mathbf{R}$. Nous avons une expression analogue à celle de Hecke (2.9) :

$$L(f,s,x) = \frac{(2\pi)^s}{i\Gamma(s)} \int_x^{i\infty} f(z)(\operatorname{Im} z)^{s+\frac{k-1}{2}-1} \,\mathrm{d}z, \qquad (\operatorname{Re}(s) > 1),$$

le chemin d'intégration étant encore une droite verticale. Lorsque $x \in \mathbf{Q}$, la décroissance de f au voisinage de x le long de la demi-droite $\{x+iy,\ y>0\}$ permet de prolonger analytiquement l'intégrale au membre de droite, et donc aussi la fonction $L(f,\cdot,x)$, à tout le plan complexe. La fonction qui en résulte satisfait encore une équation fonctionnelle de la forme $L(f,s,a/q) \leftrightarrow L(f,1-s,-d/q)$ lorsque $ad \equiv 1 \pmod q$. Nous pouvons donc définir la valeur centrale

$$L_f(x) := L(f,1/2,x) \qquad (x \in \mathbf{Q}).$$

Lorsque $k=2$, nous retrouvons, à un facteur multiplicatif près, une quantité connue sous le nom de symbole modulaire :

$$L_f(x) = c_f\langle x\rangle_f, \qquad \langle x\rangle_f := \int_x^{i\infty} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (k=2).$$

Les symboles modulaires sont notamment utilisés pour calcul explicitement des formes modulaires (Cremona 1997).

Motivés par des applications liées au rang du groupe des points rationnels d'une courbe elliptique le long d'une famille d'extensions, Mazur et Rubin ont formulé une série de conjectures sur la répartition des valeurs des symboles modulaires $\langle x\rangle_f$ en moyenne sur x (Mazur ; Rubin 2021). Leurs conjectures originelles portaient sur le comportement en moyenne pour x de dénominateur donné, c'est-à-dire pour $x \in \Omega_q$ avec les notations de la section qui précède. Ces conjectures sont encore ouvertes et présumées très difficiles. Le calcul du deuxième moment de ces quantités se situe à la frontière des techniques connues actuellement (Blomer ; Fouvry ; Kowalski et al. 2023).

Toujours lorsque $k=2$, Petridis et Risager (Petridis ; Risager 2018) ont montré que la question peut être résolue en effectuant une moyenne supplémentaire sur les dénominateurs, ce qui revient à choisir $x \in \Omega_{\leq Q}$ avec les notations de la section précédente. Leur théorème principal s'applique à toute forme modulaire de poids 2 sur un groupe Fuchsien de première espèce, et implique en particulier, pour une forme $f \in S_k(N)$, l'existence de $\sigma_f > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\mathbb{P}_Q\Big(\frac{L_f(x)}{\sigma_f\sqrt{\log Q}} \leq t\Big) \to \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v}{\sqrt{2\pi}}, \qquad (Q \to \infty). \tag{2.10}$$

La méthode de Petridis et Risager (Petridis ; Risager 2018) passe par l'estimation de la fonction génératrice des moments, et est capable de fournir un énoncé de type "quasi-puissances" analogue à (2.4).

Lorsque $k = 2$, l'une des propriétés connues du symbole modulaire se traduit dans le fait que l'application

$$x \mapsto L_f(x) - L_f(\gamma x)$$

est constante pour $\gamma \in \Gamma_0(N)$ (*cf.* (Mazur ; Rubin 2021)). Cette propriété est cruciale dans le formalisme de (Petridis ; Risager 2018). Cela en fait certainement une forme modulaire quantique au sens de Zagier.

Considérons maintenant le cas où le poids $k \in \mathbf{Z}$ est supérieur à 2. Pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$, posons

$$\phi_\gamma(x) : x \mapsto L_f(x) - L_f(\gamma x) \tag{2.11}$$

Lorsque $k > 2$, la fonction $x \mapsto L_f(x) - L_f(\gamma x)$ pour $\gamma \in \Gamma_0(N)$ n'est plus nécessairement constante. En revanche, ainsi qu'il est montré dans (Bettin ; Drappeau 2022b ; Nordentoft 2021a), les fonctions ϕ_γ se prolongent toutes en des fonctions $(1-\varepsilon)$-hölderiennes et bornées de $x \in \mathbf{R}$. Lorsque $N = 1$, c'est-à-dire si f est modulaire pour $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$, le corollaire 3 nous permet d'en déduire le théorème de la limite centrale suivant sur les valeurs $L_f(x)$ pour $x \in \Omega_{\leq Q}$, c'est-à-dire un analogue du théorème de Petridis-Risager où l'hypothèse "$f \in S_2(N)$" est remplacé par "$f \in S_k(1)$".

Théorème 12 (Bettin ; Drappeau 2022b). *Supposons que $f \in S_k(1)$. Il existe $\sigma_f > 0$ tel que l'estimation (2.10) ait lieu pour tout $t \in \mathbf{R}$, lorsque $Q \to \infty$.*

L'aspect véritablement nouveau de notre travail réside en le fait que nous n'utilisons aucune information sur f au-delà de l'existence de la formule de réciprocité (2.11) et d'une faible hypothèse de régularité sur ϕ_γ. C'est la stratégie de la méthode, basée sur l'expression en termes d'itérées de l'application de Gauss, qui permet cela.

Lee et Sun (Lee ; Sun 2019), indépendamment de nous et à peu près à la même période, ont eu la même idée d'utiliser les techniques de Baladi-Vallée sur ce sujet, et ont pu traiter le cas $f \in S_2(N)$. Un nouvel ingrédient particulièrement important dans leur travail est d'utiliser une extension naturelle de l'application de Gauss afin de travailler sur un groupe de congruence.

Toujours à la même période, Nordentoft (Nordentoft 2021b) a obtenu l'estimation du théorème 12 pour toute forme f modulaire holomorphe sur un groupe Fuchsien de première espèce, ce qui inclut le théorème 12. La méthode de Nordentoft est encore différente, mais se rapproche plutôt de celle de Petridis-Risager, et passe par l'étude des moments.

Dans un travail avec Nordentoft (Drappeau ; Nordentoft 2022), nous avons obtenu un résultat de régularité sur les fonctions (2.11) dans le cas général d'une forme de Maaß sur un sous-groupe Fuchsien de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ de première espèce, ce qui généralise tout à la fois le cas des formes holomorphes que nous venons d'aborder, ainsi que la situation de la fonction d'Estermann où $a_n = \tau(n)$, dans laquelle la forme de Maaß est une certaine série d'Eisenstein. Cela permet d'obtenir un théorème limite semblable au théorème 12 lorsque f est remplacée par une forme de Maaß pour $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$.

Dans un travail en cours avec Bettin et Lee, nous nous efforçons d'obtenir un analogue du théorème 11 pour l'action d'un groupe Fuchsien de première espèce sur ses pointes. Lorsque ce travail aura convergé, nous aurons alors une loi limite du type (2.10) valable pour les tordues additives de fonctions L de rang 2, au sens de (Iwaniec ; Kowalski 2004, Chapitre V).

2.2 Répartition des valeurs d'invariants quantiques de nœuds

Dans l'article de Zagier (Zagier 2010) où les formes modulaires quantiques sont introduites, un exemple singulier provient des invariants de Kashaev en théorie des nœuds. La définition de cet invariant fait intervenir une construction combinatoire délicate à partir d'un diagramme du nœud. Dans le cas non-trivial le plus simple, celui du nœud "de huit" noté 4_1, cet invariant prend la forme d'une fonction $J : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{r=1}^{n} |1 - \mathrm{e}(rx)|^2. \tag{2.12}$$

La somme est finie lorsque $x \in \mathbf{Q}$. Zagier a remarqué numériquement que la fonction h définie par

$$\log J(x) - \log J(1/x) = h(x) \tag{2.13}$$

semble se prolonger à $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ en une fonction régulière, par exemple continue presque partout, là où la fonction J elle-même est très irrégulière. Ces deux fonctions sont tracées aux figures 3 et 4 de (Zagier 2010).

Conjecture 3 (Zagier). — *La fonction h se prolonge en une fonction sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ qui est continue aux nombres irrationnels, et continue à gauche et à droite aux nombres rationnels.*

— *L'on a* $h(x) = \frac{C}{x} - \frac{3}{2}\log x + O(1)$ *pour* $x \in]0,1]$*, où* $C = \mathrm{Vol}(4_1)/2\pi \approx 0{,}323$ *avec* $\mathrm{Vol}(4_1)$ *le volume hyperbolique du complément du nœud de huit.*

Cette fonction nous donne l'opportunité d'un cas d'application intéressant du théorème 11. En effet, nous avons par définition de h et par la valeur $J(0) = 1$,

$$\log J(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} h(T^{j-1}(x)). \tag{2.14}$$

La fonction h ne satisfait pas tout à fait les conditions de régularité énoncées au théorème 11, mais elle n'en est pas loin. Si la conjecture 3 était vraie, nous pourrions déduire un résultat de convergence vers une loi stable de paramètre 1 similaire à (2.8), pour les valeurs prises par $\log J(x)$.

Nous nous sommes donc mis avec Sandro Bettin à la recherche d'une preuve de la conjecture de Zagier. Cela nous a mené à étudier plus particulièrement le q-symbole de Pochhammer

$$(q)_N := (1-q)\dots(1-q^N), \qquad (N \in \mathbf{N}), \tag{2.15}$$

dont le module au carré intervient dans la définition (2.12). Ce produit est aussi appelé, dans d'autres contexte, produit de Sudler (Sudler 1964), et nous reviendrons sur cela un peu plus loin.

Le symbole $(q)_n$ peut être vu comme une version tronquée de la fonction η de Dedekind

$$\eta(z) = \prod_{n\geq 1}(1 - \mathrm{e}(nz)), \qquad (\mathrm{Im}(z) > 0),$$

qui est une forme modulaire de poids $1/2$.

L'un des deux résultats principaux dans le travail (Bettin ; Drappeau 2022c) avec Sandro Bettin est une forme de modularité pour le q-symbole de Pochhammer. On dénote $\mathrm{den}(x)$ le dénominateur de $x \in \mathbf{Q}$. Informellement énoncé, notre résultat s'exprime ainsi.

Théorème 13 (Bettin ; Drappeau 2022c)**.** *Soit* $\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$*. Pour* $1 \leq r < \mathrm{den}(\gamma x)$*, l'on a*

$$\mathrm{e}(\tfrac{\gamma x}{24})(\mathrm{e}(\gamma x))_r = \chi(\gamma)\,\mathrm{e}(\tfrac{x}{24})(\mathrm{e}(x))_{r'}\psi_\gamma(x, r), \tag{2.16}$$

pour un certain $1 \leq r' < \mathrm{den}(x)$*, où* χ *est le caractère central associé à la fonction de Dedekind (Iwaniec 1997, p. 45), et* ψ_γ *est une fonction satisfaisant certaines conditions d'holomorphicité.*

La variable en laquelle ψ_γ se prolonge en une fonction holomorphe est $z = \{r\,\mathrm{den}(x)/\mathrm{den}(\gamma x)\}$. Le point de départ de la preuve est la formule sommatoire d'Abel-Plana appliquée à la somme

$$\sum_{n=1}^{N} \log(1 - \mathrm{e}(nz)).$$

La formule d'Abel-Plana est une version de la formule classique d'Euler-Maclaurin, où le terme d'erreur est exprimé de manière exacte par une intégrale de la fonction sommée, ici $\log(1 - \mathrm{e}(z))$. Notre argument exploite, de façon cachée, le fait que la fonction $\log(1 - \mathrm{e}(z))$ est proche d'une primitive de la fonction $\pi \cot(\pi z)$, laquelle est le noyau de sommation associé aux entiers relatifs (elle possède un pôle simple de résidu 1 en chaque entier relatif).

Le fait que la formule (2.16) est exacte, et la propriété d'holomorphicité que l'on a évoqué sur ψ_r, sont deux aspects cruciaux lorsque l'on souhaite sommer cette formule sur r. Nous nous appuyons grandement sur les travaux d'Ohtsuki (Ohtsuki 2016) dans cette partie. Cela nous a permis d'obtenir une preuve de la conjecture de Zagier pour certains cas particuliers de nœuds hyperboliques[3]. Dans le cas du nœud de huit, c'est-à-dire pour la fonction $J(x)$, nous déduisons en particulier la propriété suivante.

Théorème 14 (Bettin ; Drappeau 2022c)**.** *Il existe une suite (c_n) de nombres réels telle que pour $Q, N \geq 1$ et $x \in]0, 1]$, lorsque* $\mathrm{den}(x) \leq Q$*, l'on ait*

$$h(x) = \frac{C}{x} - \frac{3}{2} \log x + \sum_{n=0}^{N-1} c_n x^n + O_{Q,N}(x^N).$$

Muni d'une telle propriété, nous aimerions en déduire, par l'intermédiaire de la définition (2.13), un théorème limite sur les valeurs $\log J(x)$. Malheureusement, le fait que le terme d'erreur dépende implicitement du dénominateur de x ne nous a pas permis immédiatement de mener à bien cette stratégie. Nous y sommes cependant parvenus de façon indirecte, en complétant le théorème 13 par une autre formule de réciprocité.

Écrivons $x = [0; a_1, \dots, a_r]$ le développement en fraction continue de x. L'application de Gauss consiste à retirer de x son premier coefficient,

$$T(x) = [0; a_2, \dots, a_r].$$

Dans certaines circonstances (Bettin ; Conrey 2013), il est analytiquement plus favorable de tenter de retirer à x son dernier coefficient,

$$U(x) := [0; a_1, \dots, a_{r-1}].$$

Ceci revient, à un signe près, à conjuguer l'application de Gauss par l'involution

3. Ce sont essentiellement ceux pour lesquels la *conjecture volume* de Kashaev (Kashaev 1997) est connue ; réciproquement, la conjecture de Zagier englobe la conjecture volume.

qui à une fraction $a/q \in \,]0,1[$ associe $(-1)^{r-1}\bar{a}/q \pmod 1$, où $a\bar{a} \equiv 1 \pmod q$. Cette involution revient, grossièrement, à inverser l'ordre des coefficients dans le développement en fraction continue.

La relation de Bezout
$$\frac{\bar{a}}{q} + \frac{\bar{q}}{a} = \frac{1}{aq} \pmod 1$$
est une version précise de l'assertion que les nombres x et $U(x)$ sont proches l'un de l'autre, ce qui se voit par ailleurs dans la définition.

Nous obtenons la relation suivante.

Théorème 15 (Bettin ; Drappeau 2022c)**.** *L'on a*
$$\log J(x) = \log J(U(x)) + Ca_r(x) + E(x),$$
où $E(x)$ est un terme d'erreur qui est borné par $\log a_r(x)$ dans la plupart des circonstances.

Ce théorème est spécifique au nœud 4_1, contrairement aux précédents théorèmes 13 et 14. Le traitement du terme d'erreur a nécessité un lemme technique spécifique portant sur des sommes de cotangentes (Bettin ; Drappeau 2020), qui fut une des parties les plus délicates de l'argument.

Les théorèmes 13 et 15 fournissent juste assez d'informations sur la fonction J pour obtenir, par l'intermédiaire de l'itération (2.14), l'approximation suivante. L'on rappelle que $\Sigma(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} a_j(x)$.

Théorème 16 (Bettin ; Drappeau 2022c)**.** *Pour tout $x \in \mathbf{Q} \cap \,]0,1[$, l'on a*
$$\log J(x) \sim C\Sigma(x), \qquad \frac{\Sigma(x)}{r(x)} \to \infty.$$

D'un côté, il est classiquement connu que $r(x) \ll \log Q$ lorsque $\mathrm{den}(x) \leq Q$. D'un autre côté, le corollaire 4 nous assure que l'on a
$$\Sigma(x) \sim \frac{12}{\pi^2}(\log Q)\log\log Q$$
pour une proportion $1 + o(1)$ des rationnels $x \in \Omega_Q$ [4]. On en déduit immédiatement le corollaire suivant, qui peut être interprété comme une loi des grands nombres pour les valeurs prises par $\log J(x)$ pour $x \in \Omega_Q$.

4. Ceci est en fait vrai pour une proportion $1 + o(1)$ des nombres $x \in \Omega_q$, c'est-à-dire sans la moyenne sur le dénominateur, par des travaux de Rukavishnikova (Rukavishnikova 2011) ; on réfère aussi à l'article récent (Aistleitner ; Borda ; Hauke 2022).

Corollaire 6 (Bettin ; Drappeau 2022c). *Il existe une fonction $\varepsilon : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ avec $\varepsilon(Q) \to 0$ lorsque $Q \to \infty$, telle que*

$$\log J(x) = \Big(\frac{12}{\pi^2}C + O(\varepsilon(Q))\Big)(\log Q)\log\log Q$$

pour chaque $x \in \Omega_Q$, sauf au plus $\varepsilon(Q)Q^2$ d'entre eux.

Très récemment, Aistleitner et Borda ont obtenu plusieurs nouveaux résultats sur $J(x)$ à l'aide de leurs travaux sur les perturbations de produits de sinus (Borda ; Aistleitner 2022c ; Borda ; Aistleitner 2022b ; Borda ; Aistleitner 2022a). En particulier, il est prouvé au corollaire 2 de (Borda ; Aistleitner 2022a) que la fonction h définie en (2.13) se prolonge par densité en une fonction presque partout continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Plus précisément, Aistleitner et Borda montrent que ce prolongement de la fonction h est continu aux irrationnels x qui sont "bien approchables" au sens où la suite $(a_j(x))_j$ est non bornée. Cela leur a permis d'obtenir, dans le Theorem 4 de (Borda ; Aistleitner 2022a), un théorème de la limite centrale pour les valeurs $\log J(x)$, de la même précision que le corollaire 4,
.

L'une des principales questions en suspens est la continuité de h aux irrationnels qui sont mal approchables, et en particulier aux irrationnels quadratiques comme $1/\phi = [0; 1, 1, \dots]$. C'est l'objet d'une réflexion en cours avec Sandro Bettin et Bence Borda. Nous avons bon espoir en ce qui concerne les irrationnels quadratiques.

Une autre piste à explorer est la validité de la loi des grands nombres du même type que le corollaire 6, pour des nœuds plus généraux. Notre démonstration pour le nœud 4_1 utilise de façon cruciale la positivité des quantités sommées dans (2.12), et une nouvelle idée est nécessaire pour s'en passer. C'est plus précisément notre preuve du théorème 15 qui ne semble pas s'adapter. Les travaux d'Aistleitner-Borda (Borda ; Aistleitner 2022a), ainsi que nos travaux en cours avec Sandro Bettin et Bence Borda sur la fonction h, fourniront peut-être un autre point de départ.

Bibliographie

AISTLEITNER, C. ; BORDA, B. ; HAUKE, M., 2022. *On the distribution of partial quotients of reduced fractions with fixed denominator*. Disp. à l'adr. eprint : http://arxiv.org/abs/2210.14095. Prépublication (cf. p. 30, 41).

ASSING, E. ; BLOMER, V. ; LI, J., 2021. Uniform Titchmarsh divisor problems. *Adv. Math.* T. 393, p. 51. Id/No 108076 (cf. p. 12).

BALADI, V. ; VALLÉE, B., 2005. Euclidean algorithms are Gaussian. *J. Number Theory.* T. 110, nº 2, p. 331-386 (cf. p. 30-32).

BETTIN, S., 2016. On the reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L-functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* T. 368, nº 10, p. 6887-6914 (cf. p. 28, 29, 34).

BETTIN, S., 2019. High moments of the Estermann function. *Algebra Number Theory.* T. 13, nº 2, p. 251-300 (cf. p. 34).

BETTIN, S. ; BUI, H. ; LI, X. et al., 2020. A quadratic divisor problem and moments of the Riemann zeta-function. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS).* T. 22, nº 12, p. 3953-3980 (cf. p. 12).

BETTIN, S. ; CONREY, B., 2013. Period functions and cotangent sums. *Algebra Number Theory.* T. 7, nº 1, p. 215-242 (cf. p. 40).

BETTIN, S. ; DRAPPEAU, S., 2020. Partial sums of the cotangent function. *J. Théor. Nombres Bordeaux.* T. 32, nº 1, p. 217-230 (cf. p. 41).

BETTIN, S. ; DRAPPEAU, S., 2022a. Effective estimation of some oscillatory integrals related to infinitely divisible distributions. *Ramanujan J.* T. 57, nº 2, p. 849-861 (cf. p. 33, 34).

BETTIN, S. ; DRAPPEAU, S., 2022b. *Limit laws for rational continued fractions and value distribution of quantum modular forms.* À paraître à Proc. London Math. Soc. (cf. p. 31-34, 37).

BETTIN, S. ; DRAPPEAU, S., 2022c. Modularity and value distribution of quantum invariants of hyperbolic knot. *Math. Ann.* T. 382, nº 3–4, p. 1631-1679 (cf. p. 39-42).

BLOMER, V. ; FOUVRY, É ; KOWALSKI, E. et al., 2017. On moments of twisted L-functions. *Amer. J. Math.* T. 139, nº 3, p. 707-768 (cf. p. 28).

BLOMER, V. ; FOUVRY, É. ; KOWALSKI, E. et al., 2023. *The second moment theory of families of L-functions.* Mem. Amer. Math. Soc. Nº 1394 (cf. p. 36).

BLOMER, V. ; MILIČEVIĆ, D., 2015. Kloosterman sums in residue classes. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*. T. 17, nº 1, p. 51-69 (cf. p. 13).

BOMBIERI, E. ; FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 1986. Primes in arithmetic progressions to large moduli. *Acta Math.* T. 156, nº 1, p. 203-251 (cf. p. 11, 16, 17, 23).

BORDA, B. ; AISTLEITNER, C., 2022a. *A conjecture of Zagier and the value distribution of quantum modular forms*. Prépublication (cf. p. 42).

BORDA, B. ; AISTLEITNER, C., 2022b. *Maximizing Sudler products via Ostrowski expansions and cotangent sums*. À paraître à Algebra Number Theory (cf. p. 42).

BORDA, B. ; AISTLEITNER, C., 2022c. Quantum invariants of hyperbolic knots and extreme values of trigonometric products. *Math. Z.* T. 302, p. 759-782 (cf. p. 42).

BUTTCANE, J., 2022. *On sums of hyper-Kloosterman sums*. Disp. à l'adr. eprint : `http://arxiv.org/abs/2205.14194`. Prépublication (cf. p. 13).

CONREY, J. B., [s. d.]. *The mean-square of Dirichlet L-functions*. Disp. à l'adr. eprint : `http://arxiv.org/abs/0708.2699`. AIM preprint number 2007-54 (cf. p. 29).

CREMONA, J. E., 1997. *Algorithms for modular elliptic curves*. Cambridge : Cambridge University Press (cf. p. 36).

DESHOUILLERS, J.-M. ; IWANIEC, H., 1982a. Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. *Invent. Math.* T. 70, nº 2, p. 219-288 (cf. p. 11-13, 17, 24).

DESHOUILLERS, J.-M. ; IWANIEC, H., 1982b. On the greatest prime factor of $n^2 + 1$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. T. 32, nº 4, p. 1-11 (cf. p. 25).

DOLGOPYAT, D., 1998. On Decay of Correlations in Anosov Flows. *Ann. of Math. (2)*. T. 147, nº 2, p. 357-390 (cf. p. 31, 32).

DRAPPEAU, S., 2015. Théorèmes de type Fouvry–Iwaniec pour les entiers friables. *Compos. Math.* T. 151, nº 5, p. 828-862 (cf. p. 21).

DRAPPEAU, S., 2017. Sums of Kloosterman sums in arithmetic progressions, and the error term in the dispersion method. *Proc. London Math. Soc.* T. 114, p. 684-732 (cf. p. 12, 16).

DRAPPEAU, S. ; MAYNARD, J., 2019. Sign changes of Kloosterman sums and exceptional characters. *Proc. Am. Math. Soc.* T. 147, nº 1, p. 61-75 (cf. p. 14).

DRAPPEAU, S. ; NORDENTOFT, A. C., 2022. *Central values of additive twists of Maaß forms L-functions*. Disp. à l'adr. eprint : `http://arxiv.org/abs/2208.14346`. Prépublication (cf. p. 38).

DRAPPEAU, S. ; PRATT, K. ; RADZIWIŁŁ, M., 2022. *One-level density estimates for Dirichlet L-functions with extended support*. À paraître à Algebra Number Theory (cf. p. 12, 23).

DRAPPEAU, S. ; TOPACOGULLARI, B., 2019. Combinatorial identities and Titchmarsh's divisor problem for multiplicative functions. *Algebra Number Theory*. T. 13, nº 10, p. 2383-2425 (cf. p. 17, 21).

DUKE, W. ; FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 1994. A quadratic divisor problem. *Invent. Math.* T. 115, nº 1, p. 209-217 (cf. p. 15).

DUKE, W. ; FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 1995. Equidistribution of Roots of a Quadratic Congruence to Prime Moduli. *Ann. of Math. (2)*. T. 141, nº 2, p. 423-441 (cf. p. 27).

ESTERMANN, T., 1930. On the Representations of a Number as the Sum of Two Product. *J. London Math. Soc.* T. s1-5, nº 2, p. 131-137 (cf. p. 28).

FOUVRY, É., 1985. Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh. *J. Reine Angew. Math.* T. 357, p. 51-76 (cf. p. 16, 17, 23).

FOUVRY, É. ; MICHEL, Ph., 2003. Sommes de modules de sommes d'exponentielles. *Pacific J. Math.* T. 209, nº 2, p. 261-288 (cf. p. 15).

FOUVRY, É. ; MICHEL, Ph., 2007. On the sign change of Kloosterman sums. *Ann. of Math. (2)*. T. 165, nº 3, p. 675-715 (cf. p. 13).

FOUVRY, É. ; TENENBAUM, G., 1990. Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier. In : *Analytic number theory (Tokyo, 1988)*. Springer. T. 1434, p. 86-102. Lecture Notes in Math. (Cf. p. 21).

FOUVRY, É. ; TENENBAUM, G., 2022. Multiplicative functions in large arithmetic progressions and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* T. 375, nº 1, p. 245-299 (cf. p. 18).

FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 2003. Exceptional characters and prime numbers in arithmetic progressions. *Int. Math. Res. Not.* T. 2003, nº 37, p. 2033-2050 (cf. p. 14).

FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 2004. Exceptional characters and prime numbers in short intervals. *Selecta Math. (N.S.)* T. 10, nº 1, p. 61-69 (cf. p. 14, 15).

FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 2005. The illusory sieve. *Int. J. Number Theory*. T. 01, nº 04, p. 459-494 (cf. p. 14, 15).

FRIEDLANDER, J. B. ; IWANIEC, H., 2013. Exceptional discriminants are the sum of a square and a prime. *Q. J. Math.* T. 64, nº 4, p. 1099-1107 (cf. p. 14).

GRANVILLE, A., 2008. Smooth numbers : computational number theory and beyond. In : *Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography*. Cambridge Univ. Press. T. 44, p. 267-323. Math. Sci. Res. Inst. Publ. (Cf. p. 26).

HARPER, A. J., 2012. *Bombieri-Vinogradov and Barban-Davenport-Halberstam type theorems for smooth numbers*. Disp. à l'adr. eprint : `http://arxiv.org/abs/1208.5992`. Prépublication (cf. p. 21).

HEATH-BROWN, D. R., 1982. Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity. *Canad. J. Math.* T. 34, nº 6, p. 1365-1377 (cf. p. 18).

HEATH-BROWN, D. R., 1983. Prime Twins and Siegel Zeros. *Proc. London Math. Soc. (3).* T. s3-47, nº 2, p. 193-224 (cf. p. 14, 15).

HEINRICH, L., 1987. Rates of convergence in stable limit theorems for sums of exponentially ψ-mixing random variables with an application to metric theory of continued fractions. *Math. Nachr.* T. 131, p. 149-165 (cf. p. 34).

HILDEBRAND, A. ; TENENBAUM, G., 1993. Integers without large prime factors. *J. Théor. Nombres Bordeaux.* T. 5, p. 411-484 (cf. p. 26).

HMYROVA, N. A., 1964. On polynomials with small prime divisors. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* T. 155, p. 1268-1271 (cf. p. 27).

HOOLEY, C., 1964. On the distribution of the roots of polynomial congruences. *Mathematika.* T. 11, nº 01, p. 39-49 (cf. p. 15).

IWANIEC, H., 1978. Almost-primes represented by quadratic polynomials. *Invent. Math.* T. 47, p. 171-188 (cf. p. 25).

IWANIEC, H., 1982. Mean values for Fourier coefficients of cusp forms and sums of Kloosterman sums. In : *Journées arithmétiques 1980.* T. 56, p. 306-321. London Math. Soc. Lecture Note Ser. (Cf. p. 11).

IWANIEC, H., 1997. *Topics in classical automorphic forms.* Providence, RI : American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics (cf. p. 39).

IWANIEC, H. ; KOWALSKI, E., 2004. *Analytic number theory.* Cambridge Univ Press (cf. p. 38).

KASHAEV, R. M., 1997. The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm. *Lett. Math. Phys.* T. 39, nº 3, p. 269-275 (cf. p. 40).

KATZ, N. M., 1980. *Sommes exponentielles. Cours à Orsay, automne 1979. Redige par Gerard Laumon, preface par Luc Illusie.* Astérisque (cf. p. 13).

KATZ, N. M. ; SARNAK, P., 1999. Zeroes of zeta functions and symmetry. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.* T. 36, nº 1, p. 1-26 (cf. p. 22).

KIRAL, E. M. ; YOUNG, M. P., 2019. Kloosterman sums and Fourier coefficients of Eisenstein series. *Ramanujan J.* T. 49, nº 2, p. 391-409 (cf. p. 13, 29).

KLOECKNER, B. R., 2019. Effective perturbation theory for simple isolated eigenvalues of linear operators. *J. Oper. Theory.* T. 81, nº 1, p. 175-194 (cf. p. 32).

KLOOSTERMAN, H. D., 1927. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. *Acta Math.* T. 49, p. 407-464 (cf. p. 11).

KOWALSKI, E., 2003. Classical automorphic forms. In : *An introduction to the Langlands program. Lectures presented at the Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel, March 12–16, 2001.* Boston, MA : Birkhäuser, p. 39-71 (cf. p. 16).

KUZNETSOV, N. V., 1981. Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture. Sums of Kloosterman sums. *Math. USSR, Sb.* T. 39, nº 3, p. 299-342 (cf. p. 11, 12).

LA BRETÈCHE, R. ; DRAPPEAU, S., 2020. Level of distribution of quadratic polynomials and an upper bound sieve for friable integers. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS).* T. 22, nº 5, p. 1577-1624 (cf. p. 25-27).

LEE, J. ; SUN, H.-S., 2019. *Dynamics of continued fractions and distribution of modular symbols.* Disp. à l'adr. eprint : `http://arxiv.org/abs/1902.06277`. Prépublication (cf. p. 37).

LINNIK, Ju. V., 1963. *The dispersion method in binary additive problems.* American Mathematical Society (AMS), Providence, RI. Transl. Math. Monogr. (Cf. p. 19).

MAYNARD, J., 2020. *Primes in arithmetic progressions to large moduli I : Fixed residue classes.* À paraître à Mem. Amer. Math. Soc. (cf. p. 12).

MAZUR, B. ; RUBIN, K., 2021. *Arithmetic conjectures suggested by the statistical behavior of modular symbols.* Disp. à l'adr. eprint : `https://arxiv.org/abs/1910.12798`. À paraître à Exp. Math. (cf. p. 36, 37).

MERIKOSKI, J., 2022. *On the largest prime factor of* $n^2 + 1$. À paraître à J. Eur. Math. Soc. (JEMS) (cf. p. 26).

MONTGOMERY, H. L., 1973. *The pair correlation of zeros of the zeta function* [Analytic Number Theory, Proc. Sympos. Pure Math. 24, St. Louis Univ. Missouri 1972, 181-193 (1973).] (cf. p. 22).

MOREE, P., 2014. Integers without large prime factors : from Ramanujan to de Bruijn. *Integers.* T. 14A, Paper No. A5, 13 (cf. p. 26).

NORDENTOFT, A. C., 2021a. A note on additive twists, reciprocity laws and quantum modular forms. *Ramanujan J.* T. 56, nº 1, p. 151-162 (cf. p. 37).

NORDENTOFT, A. C., 2021b. Central values of additive twists of cuspidal L-functions. *J. Reine Angew. Math.* T. 2021, nº 776, p. 255-293 (cf. p. 37).

OHTSUKI, T., 2016. On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the 5_2 knot. *Quantum Topology.* T. 7, nº 4, p. 669-735 (cf. p. 40).

PETRIDIS, Y. N. ; RISAGER, M. S., 2018. Arithmetic statistics of modular symbols. *Invent. Math.* P. 1-57 (cf. p. 36, 37).

PETROW, I. ; YOUNG, M. P., 2020. The Weyl bound for Dirichlet L-functions of cube-free conductor. *Ann. of Math. (2).* T. 192, nº 2, p. 437-486 (cf. p. 13).

PITT, N., 2013. On an analogue of Titchmarsh's divisor problem for holomorphic cusp forms. *J. Amer. Math. Soc.* T. 26, nº 3, p. 735-776 (cf. p. 11).

PRATT, K. ; ROBLES, N. ; ZAHARESCU, A. et al., 2020. More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line. *Res. Math. Sci.* T. 7, nº 1, p. 74. Id/No 2 (cf. p. 12).

RAMARÉ, O., 2013. Prime numbers : emergence and victories of bilinear forms decomposition. *Eur. Math. Soc. Newsl.* Nº 90, p. 18-27 (cf. p. 18).

RUKAVISHNIKOVA, M. G., 2011. The law of large numbers for the sum of the partial quotients of a rational number with fixed denominator. *Math. Notes.* T. 90, nº 3, p. 418-430 (cf. p. 41).

SICA, F., 1998. *The order of vanishing of L-functions at the center of the critical strip.* Thèse de doct. McGill University, Montréal (cf. p. 23).

SUDLER, C., 1964. An estimate for a restricted partition function. *Q. J. Math.* T. 15, p. 1-10 (cf. p. 39).

TANG, H., 2020. A note on Titchmarsh divisor problem under the generalized Riemann hypothesis. *Rocky Mt. J. Math.* T. 50, nº 6, p. 2223-2233 (cf. p. 16).

TITCHMARSH, E. C., 1930. A divisor problem. *Rend. Circ. Mat. Palermo.* T. 54, nº 1, p. 414-429 (cf. p. 16).

VALLÉE, B., 2000. Digits and continuants in Euclidean algorithms. Ergodic versus Tauberian theorems. *J. Théor. Nombres Bordeaux.* T. 12, nº 2, p. 531-570. Colloque International de Théorie des Nombres (Talence, 1999) (cf. p. 30).

VINOGRADOV, I. M., 1937. A new estimate of a certain sum containing primes. *Recueil Mathématique. Nouvelle Série.* T. 2, p. 783-792 (cf. p. 19).

WEIL, A., 1948. On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* T. 34, nº 5, p. 204 (cf. p. 11).

WU, X., 2020. *The fourth moment of Dirichlet L-functions at the central value.* Disp. à l'adr. eprint : `https://arxiv.org/pdf/2008.13407.pdf`. Prépublication (cf. p. 28).

XI, P., 2018. Sign changes of Kloosterman sums with almost prime moduli. II. *Int. Math. Res. Notices IMRN.* T. 2018, nº 4, p. 1200-1227 (cf. p. 14).

XI, P., 2020. When Kloosterman sums meet Hecke eigenvalues. *Invent. Math.* T. 220, nº 1, p. 61-127 (cf. p. 15).

YOUNG, M. P., 2011. The fourth moment of Dirichlet L-functions. *Ann. of Math. (2).* T. 173, nº 1, p. 1-50 (cf. p. 11, 28).

ZACHARIAS, R., 2019. Simultaneous non-vanishing for Dirichlet L-functions. *Ann. Inst. Fourier.* T. 69, nº 4, p. 1459-1524 (cf. p. 13).

ZAGIER, D., 2010. Quantum modular forms. In : *Quanta of maths.* T. 11, p. 659-675. Clay Math. Proc. (Cf. p. 29, 38).